4. Tutorium **für 4.11.2022**

4.1 Spektraltheorem

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t)$$

wobei $\hat{\mathbf{A}}$ ein linearer Operator ist und $\mathbf{x}(t)$ ein Vektor ist.
a) Der Vektor $\mathbf{x}$ und der Operator lassen sich in einer (zeitunabhängigen) Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ als $\mathbf{x}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i$ und $\hat{\mathbf{A}} = a_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ darstellen. Schreiben Sie die Differentialgleichung in Indexschreibweise an.
b) Die normierten Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ erfüllen die Eigenwertgleichungen $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$). Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

und stellen Sie die Eigenvektoren in der Basis $\mathcal{B}$ dar.
c) $\hat{\mathbf{P}}_i$ sei der orthogonale Projektor auf den Vektor $\mathbf{v}_i$ (aus (b)). Berechnen Sie die Matrixelemente des Operators $\hat{\mathbf{P}}_i$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.
d) Zeigen Sie, $\hat{\mathbf{A}} = \lambda_i\hat{\mathbf{P}}_i$.
e) Schreiben Sie die Matrixelemente des Operators $\hat{\mathbf{A}}$ bezüglich der Eigenbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ an.
f) Der Vektor $\mathbf{x}(t)$ wird in der Eigenbasis als $\mathbf{x}(t) = x'_i(t)\mathbf{v}_i$ dargestellt. Schreiben Sie die entsprechenden Differentialgleichungen der Koeffizienten $x'_i(t)$ ($i = 1, 2$) an, und lösen Sie die Differentialgleichungen für $x'_i(t)$.
g) Der Operator $e^{\hat{\mathbf{A}}t}$ ist durch $e^{\hat{\mathbf{A}}t} = \sum_n \hat{\mathbf{A}}^n t^n/n!$ definiert. Zeigen Sie $e^{\hat{\mathbf{A}}t} = \sum_{i=1}^{3} e^{\lambda_i t}\hat{\mathbf{P}}_i$ und dass die Lösung der Differentialgleichung durch $\mathbf{x}(t) = e^{\hat{\mathbf{A}}t}\mathbf{x}(0)$ gegeben wird. Stellen Sie den Vektor $\mathbf{x}(t)$ in der Basis $\mathcal{B}$ dar.

4.2 Identität

$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ sei eine nicht-orthogonale Basis in einem Vektorraum V. Die Basisvektoren werden in einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ als $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ mit

$$\begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt.
a) Bestimmen Sie die Basisvektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ im dualen Raum V^*.
b) $\hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{f}_{\underline{i}} \otimes \mathbf{f}^{\underline{i}}$ (ohne Summe über i) ist ein (nicht-orthogonaler) Projektor auf den Vektor $\mathbf{f}_i$. Berechnen Sie die Matrixelemente $p_i{}^{jk}$ des Operators bezüglich der Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (d.h. $\hat{\mathbf{P}}_i = p_i{}^{jk}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$).

c) Überprüfen Sie, dass die Matrixdarstellung des Projektors $\hat{\mathbf{P}}_1 + \hat{\mathbf{P}}_2$ eine Einheitsmatrix ist.
d) $\hat{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{f}^{\underline{i}} \otimes \mathbf{f}_{\underline{i}}$ (ohne Summe über i) ist ein (nicht-orthogonaler) Projektor auf den Vektor $\mathbf{f}^i$. Berechnen Sie die Matrixelemente ${q_i}^{jk}$ des Operators bezüglich der Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (d.h. $\hat{\mathbf{Q}}_i = {q_i}^{jk}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$).
e) Überprüfen Sie, dass die Matrixdarstellung des Projektors $\hat{\mathbf{Q}}_1 + \hat{\mathbf{Q}}_2$ eine Einheitsmatrix ist.

4.3 Differentialoperatoren

Ein Vektor seien als $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ in einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dargestellt.
a) Berechnen Sie mit Hilfe der Indexschreibweise die Divergenz des Vektors $\nabla \cdot \mathbf{x} = \partial_i x_i$, wobei $\nabla = \mathbf{e}_i\partial_i$ mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
b) Berechnen und vereinfachen Sie mit Hilfe der Indexschreibweise den Gradient ∇x wobei $x = \sqrt{x_i x_i}$.
c) Der Vektor $\mathbf{x}$ wird in einer nicht-orthogonalen und ortsunabhängigen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ mit $\mathbf{x} = x'^i\mathbf{f}_i$ dargestellt, wobei die Basistransformation durch $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j {s^j}_i$ gegeben ist. Der Gradient einer analytischen Funktion $\psi(\mathbf{x})$ wird in der Orthonormalbasis als $\nabla\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i\partial_i\psi(\mathbf{x})$ und in der nicht-orthogonalen Basis als $\nabla\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^i\partial'_i\psi(\mathbf{x})$ dargestellt, wobei $\mathbf{e}^i$ und $\mathbf{f}^i$ die dualen Basisvektoren sind und $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i}$. Zeigen Sie, $\partial'_i\psi(\mathbf{x}) = {s^j}_i\partial_j\psi(\mathbf{x})$. (Hinweise : für Orthonormalbasis $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ und $x^i = x_i$)

Ankreuzbar: 1a-d, 1e-g, 2a-c, 2de, 3a-c