4. Tutorium - Lösungen **4.11.2022**

4.1 Spektraltheorem

a) $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) \to \frac{d}{dt}x_i(t)\mathbf{e}_i = a_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot x_k(t)\mathbf{e}_k = a_{ij}x_k(t)\mathbf{e}_i\delta_{jk} = a_{ij}x_j(t)\mathbf{e}_i$
oder mit Koeffizientenvergleich $\frac{d}{dt}x_i(t) = a_{ij}x_j(t)$
Anmerkung : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist eine Matrixdarstellung des Operators $\hat{\mathbf{A}} = a_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.
$\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}$ wird in Indexschreibweise als $a_{ij}x_j$ dargestellt. Wie ein Vektor, kann ein Operator als eine Matrix dargestellt werden. Die Elemente der Matrix hängen von der Basis ab.
b) Eigenwertgleichung : $a_{ij}x_j = \lambda x_i \to (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0$
Wenn $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$, existiert nicht-triviale Lösungen
$\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = (\lambda - 4)^2 - 1 = 0 \to \lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$
Eigenvektoren : $\mathbf{v}_1 = 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ für $\lambda_1 = 5$ und $\mathbf{v}_2 = 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ für $\lambda_2 = 3$
Anmerkung : Für einen selbstadjungierter Operator sind die Eigenvektoren orthogonal, d.h. $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j \propto \delta_{ij}$. Die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ erfüllt die Bedingung $\det\mathbf{S} \neq 0$ und die Eigenvektoren sind linear unabhängig.
c) $\mathbf{v}_i = s_{ji}\mathbf{e}_j$ mit $\begin{pmatrix} s^1_1 & {s^1}_2 \\ s^2_1 & {s^2}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$\hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{v}_{\underline{i}} \otimes \mathbf{v}_{\underline{i}} = s_{j\underline{i}}\mathbf{e}_j \otimes s_{k\underline{i}}\mathbf{e}_k = s_{j\underline{i}}s_{k\underline{i}}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$
$\mathbf{P}_i$ sei die Matrixdarstellung des Operators $\hat{\mathbf{P}}_i$:
$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
d) $\lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
Alternativ : Für die Orthonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\hat{\mathbf{P}}_1 + \hat{\mathbf{P}}_2 = \hat{\mathbf{I}}$.
$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{P}}_1 + \hat{\mathbf{P}}_2) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{A}\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^2 \lambda_i\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^2 \lambda_i\hat{\mathbf{P}}_i$
e) Matrixelemente bezüglich der Eigenbasis : $a'_{ij} = \mathbf{v}_i\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i\lambda_{\underline{j}}\mathbf{v}_{\underline{j}} = \lambda_{\underline{j}}\delta_{i\underline{j}}$, $\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
f) $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) \to \frac{d}{dt}x'_i(t)\mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{A}}x'_i(t)\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^2 \lambda_i x'_i(t)\mathbf{v}_i$,
Koeffizientenvergleich : $\frac{d}{dt}x'_i(t) = \lambda_i x'_i(t)$, Die Lösung $x'_i(t) = e^{\lambda_{\underline{i}}t}x'_{\underline{i}}(0)$
Anmerkung : Mit der Basistransformation zur Eigenbasis wurde die **gekoppelten** linearen Differentialgleichungen $\frac{d}{dt}x_i(t) = a_{ij}x_j(t)$ in zwei **ungekoppelten** linearen Differentialgleichungen $\frac{d}{dt}x'_i(t) = \lambda_i x'_i(t)$ transformiert.
g) Für orthogonale Projektoren gilt $\hat{\mathbf{P}}_i\hat{\mathbf{P}}_j = \delta_{\underline{i}j}\hat{\mathbf{P}}_{\underline{i}}$
$\to \hat{\mathbf{A}}^n = (\lambda_1\hat{\mathbf{P}}_1 + \lambda_2\hat{\mathbf{P}}_2)^n = \lambda_1^n\hat{\mathbf{P}}_1 + \lambda_2^n\hat{\mathbf{P}}_2$
$\to e^{\hat{\mathbf{A}}t} = \sum_n \hat{\mathbf{A}}^n t^n/n! = \sum_n \sum_i (\lambda_i t)^n/n!\hat{\mathbf{P}}_i = \sum_i e^{\lambda_i t}\hat{\mathbf{P}}_i$
$e^{\hat{\mathbf{A}}t}\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^2 e^{\hat{\mathbf{A}}t}x'_i(0)\mathbf{v}_i = \sum_{i,j=1}^2 e^{\lambda_j t}\hat{\mathbf{P}}_j x'_i(0)\mathbf{v}_i = \sum_{i,j=1}^2 e^{\lambda_j t}\delta_{ij}x'_i(0)\mathbf{v}_i$
$= \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t}x'_i(0)\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^2 x'_i(t)\mathbf{v}_i = \mathbf{x}(t)$
Basistransformation : $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1(0) \\ x'_2(0) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1(0) \\ x'_2(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{5t}x'_1(0) + e^{3t}x'_2(0)\right)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{5t}x'_1(0) - e^{3t}x'_2(0)\right)\mathbf{e}_2$
Zusätzliche Frage : Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren des Operators $f(\hat{\mathbf{A}})$ wobei $f(x)$ eine analytische Funktion ist.
Lösung : Eigenwerte $f(\lambda_i)$ und Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ (Nachrechnen)

4.2 Identität

a) Aus der Angabe $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ und zusätzlich werden die dualen Basisvektoren als $\mathbf{f}^i = t^i{}_j \mathbf{e}^j$ dargestellt.
$\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = t^i{}_k \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_\ell s^\ell{}_j$
Weil für die Orthonormalbasis $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$, gilt $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = t^i{}_k \delta^k_\ell s^\ell{}_j = t^i{}_k s^k{}_j$
(Anmerkung : Da $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, kann für die Orthonormalbasis die dualen Basisvektoren als $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ oder $\mathbf{e}^i = \delta^{ij}\mathbf{e}_j$ dargestellt werden.)
Mit der Definition der dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ muss die Transformationsmatrix $\mathbf{T} = (t^i{}_j)$ die Inverse der Matrix $\mathbf{S} = (s^i{}_j)$ sein, d.h. $\begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{f}^1 = -2\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2$ und $\mathbf{f}^2 = \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2$ oder $\mathbf{f}^1 = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}^2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$
b) $\mathbf{f}^i = t^i{}_j \mathbf{e}^j = t^i{}_j \delta^{jk} \mathbf{e}_k$
$\hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{f}_{\underline{i}} \otimes \mathbf{f}^{\underline{i}} = \mathbf{e}_j s^j{}_{\underline{i}} \otimes t^{\underline{i}}{}_\ell \mathbf{e}^\ell = \mathbf{e}_j s^j{}_{\underline{i}} \otimes t^{\underline{i}}{}_\ell \delta^{\ell k}\mathbf{e}_k = s^j{}_{\underline{i}} t^{\underline{i}}{}_\ell \delta^{\ell k} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$
Die Matrixelemente sind gegeben durch $p_i{}^{jk} = \mathbf{e}^j \hat{P}_i \mathbf{e}^k = s^j{}_{\underline{i}} t^{\underline{i}}{}_\ell \delta^{\ell k}$
(Anmerkung : In der Basis mit dem tiefgestellten Index werden die Koordinate eines Vektors oder die Elemente einer Matrix mit dem hochgestellten Index (kontravariante Elemente) dargestellt.)
$\mathbf{P}_i$ sei die Matrixdarstellung des Operators $\hat{\mathbf{P}}_i$:
$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} p_1{}^{11} & p_1{}^{12} \\ p_1{}^{21} & p_1{}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^1_1 \\ s^2{}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} p_2{}^{11} & p_2{}^{12} \\ p_2{}^{21} & p_2{}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^1_2 \\ s^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
c) $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Alternativ : $\sum_{i=1}^2 p_i{}^{jk} = s^j{}_i t^i{}_\ell \delta^{\ell k} = \delta^j_\ell \delta^{\ell k} = \delta^{jk}$ ($\mathbf{T}$ ist die Inverse von $\mathbf{S}$)
d) $\hat{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{f}^{\underline{i}} \otimes \mathbf{f}_{\underline{i}} = t^{\underline{i}}{}_\ell \mathbf{e}^\ell \otimes \mathbf{e}_k s^k{}_{\underline{i}} = t^{\underline{i}}{}_\ell \delta^{\ell j} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k s^k{}_{\underline{i}} = s^k{}_{\underline{i}} t^{\underline{i}}{}_\ell \delta^{\ell j} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$
Die Matrixelemente sind durch $q_i{}^{jk} = \mathbf{e}^j \hat{Q}_i \mathbf{e}^k = s^k{}_{\underline{i}} t^{\underline{i}}{}_\ell \delta^{\ell j}$ gegeben.
$\mathbf{Q}_i$ sei die Matrixdarstellung des Operators $\hat{\mathbf{Q}}_i$: $\mathbf{Q}_i = \mathbf{P}_i^T$
e) $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = \mathbf{P}_1^T + \mathbf{P}_2^T = \mathbf{I}$
Anmerkung : Zum Beispiel ist der Projektor $\hat{\mathbf{P}}_1$ die Projektion auf den Vektor $\mathbf{f}_1$ parallel zum Vektor $\mathbf{f}_2$. Versuchen Sie, die Projektion eines Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ mit dem Operator $\hat{\mathbf{P}}_1$ graphisch darzustellen. (siehe Bsp.2.4)

4.3 Differentialoperatoren

a) $\nabla \mathbf{x} = \mathbf{e}_i \partial_i x_j \mathbf{e}_j = \partial_i x_j \delta_{ij} = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3$
b) $\nabla x = \mathbf{e}_i \partial_i \sqrt{x_j \mathbf{e_j} x_k \mathbf{e_k}} = \mathbf{e}_i \partial_i \sqrt{x_j x_k \delta_{jk}} = \mathbf{e}_i \partial_i \sqrt{x_j x_j} = \mathbf{e}_i \frac{1}{2\sqrt{x_k x_k}} \partial_i (x_j x_j) = \mathbf{e}_i \frac{1}{2\sqrt{x_k x_k}} 2\delta_{ij} x_j = \mathbf{e}_i \frac{x_i}{\sqrt{x_k x_k}}$
Anmerkung : Vergessen Sie nicht die Einsteinsche Summenkonvention, z.B. $\sqrt{x_j x_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 x_j x_j} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3}$. Die Kettenregel richtig angewenden $(\partial_i \sqrt{x_j x_j} \neq (\partial_i \sqrt{x_j})\sqrt{x_j} + \sqrt{x_j}(\partial_i \sqrt{x_j}))$
c) $\partial'_i \psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j}$
Da $x^j = s^j{}_k x'^k$, $\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = s^j{}_k \partial'_i x'^k = s^j{}_k \delta^k_i = s^j{}_i$
Da für die Orthonormalbasis, $x^j = x_j$ und $\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^j} = \partial_j \psi$
$\rightarrow \partial'_i \psi(\mathbf{x}) = s^j{}_i \partial_j f$.
Anmerkung : Die Ableitung $\frac{\partial \psi}{\partial x'^j}$ wird mit der gleichen Matrix $\mathbf{S}$ als die Basisvektoren transformiert. Diese kovariante Komponente wird mit dem tiefgestellten Index $\partial'_j = \frac{\partial}{\partial x'^j}$ dargestellt. Anderseits wird die Ableitung $\frac{\partial \psi}{\partial x'_j}$ mit der Inverse $\mathbf{S}^{-1}$ transformiert (nachrechnen!). Diese kontravariante Komponente wird mit dem hochgestellten Index $\partial'^j = \frac{\partial}{\partial x'_j}$ dargestellt.