5. Tutorium - Lösungen **11.11.2022**

5.1 Metrischer Tensor

a)$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i \cdot x^j\mathbf{e}_j = x^i x^j \delta_{ji} = 4+1+16 = 21$, $L = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{21}$
b) Determinante : $V \equiv \det\mathbf{S} = \mathbf{f}_1 \cdot (\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3) = -2$
Basisvektoren im dualen Raum :
$\mathbf{f}^1 = \frac{1}{V}\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3 = (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{f}^2 = \frac{1}{V}\mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{f}^3 = \frac{1}{V}\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}(3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$
Vektor $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}_i x'^i \to x'^i = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x}$
Koordinaten : $x'^1 = \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{x} = -1$, $x'^2 = \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{x} = -1$, $x'^3 = \mathbf{f}^3 \cdot \mathbf{x} = 4$,
$$(x'^i\mathbf{f}_i)\cdot(x'^j\mathbf{f}_j) = x'^i(\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j)x'^j \equiv x'^i h_{ij} x'^j \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 21$$
Länge des Vektors : $\sqrt{(x'^i\mathbf{f}_i)\cdot(x'^j\mathbf{f}_j)} = \sqrt{21}$
c)
Vektor $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} = \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f}^i x'_i \to x'_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x}$
Koordinaten : $x'_1 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{x} = 8$, $x'_2 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{x} = -1$, $x'_3 = \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{x} = 7$,
$(x'_i\mathbf{f}^i)\cdot(x'^j\mathbf{f}_j) = x'_i x'^j \delta^i_j = -8+1+28 = 21$
Länge des Vektors : $\sqrt{(x'_i\mathbf{f}^i)\cdot(x'^j\mathbf{f}_j)} = \sqrt{21}$
d) Identität : $\mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}_i = \mathbf{I}$
$\mathbf{f}_i = (\mathbf{f}^j \otimes \mathbf{f}_j)\cdot\mathbf{f}_i = \mathbf{f}^j(\mathbf{f}_j\cdot\mathbf{f}_i) \to h_{ji} = \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_i$ (siehe h_{ij} in (b))
e) Identität : $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i = \mathbf{I}$
$\mathbf{f}^i = (\mathbf{f}_j \otimes \mathbf{f}^j)\cdot\mathbf{f}^i = \mathbf{f}_j(\mathbf{f}^j\cdot\mathbf{f}^i) \to h^{ji} = \mathbf{f}^j \cdot \mathbf{f}^i$
Anmerkung : Die Transformationsmatrix h_{ij} ist als metrischer Tensor bekannt ($g_{ij} = h_{ij}$) bezüglich der Basis F und der Tensor definiert die Länge eines Vektors $L = \sqrt{x'^i g_{ij} x'^j}$ (siehe (b)). Im dualen Raum ist der metrische Tensor als $g^{ij} = h^{ij}$ definiert. Bei der Basistransformation von $\mathbf{f}_j$ zu $\mathbf{f}^i$ ($\mathbf{f}^i = g^{ij}\mathbf{f}_j$) werden die Koordinaten von x'^j zu x'_i durch $x'_i = g_{ij}x'^j$ transformiert (nachrechnen!). Die Transformation der Koordinaten ist die Inverse der Basistransformation, d.h. $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Die inverse Transformation ist auch durch $\mathbf{f}_i = g_{ij}\mathbf{f}^j$ und $x'^i = g^{ij}x'_j$ gegeben.

5.2 Tensoren

a) $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = a^i{}_j \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j x^k \mathbf{f}_k = a^i{}_j \mathbf{f}_i x^k \delta^j_k = a^i{}_j x^j \mathbf{f}_i$ und $\lambda\mathbf{x} = \lambda x^i \mathbf{f}_i$
Koeffizientenvergleich : $a^i{}_j x^j = \lambda x^i$
b) $\mathbf{y}\hat{\mathbf{A}} = y_k \mathbf{f}^k a^i{}_j \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^j = y_k a^i{}_j \delta^k_i \mathbf{f}^j = y_i a^i{}_j \mathbf{f}^j$ und $\lambda\mathbf{y} = \lambda y_j \mathbf{f}^j$
Koeffizientenvergleich : $y_i a^i{}_j = \lambda y_j$
c) Mit Identität $\mathbf{I} = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}^i$ gilt $\mathbf{f}^i = \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{f}^j \cdot \mathbf{f}^i = \mathbf{f}_j g^{ji}$ wobei $g^{ji} = \mathbf{f}^j \cdot \mathbf{f}^i$
$\hat{\mathbf{A}} = a_{ij}\mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j = a_{ij} g^{ki} \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{f}^j \equiv a^k{}_j \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{f}^j$
Koeffizientenvergleich : $a^k{}_j = a_{ij} g^{ki}$
d) $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = a_{ij}\mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j x^k \mathbf{f}_k = a_{ij} x^j \mathbf{f}^i$ und $\lambda\mathbf{x} = \lambda x^j \mathbf{f}_j = \lambda x^j g_{ji} \mathbf{f}^i$ mit $g_{ji} = \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_i$
Koeffizientenvergleich : $a^i{}_j x^j = \lambda x^j g_{ji} \to h_{ji} = g_{ji} = \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_i$
Anmerkung : Der Koeffizientenvergleich muss mit der gleichen Basis auf beiden Seiten der Gleichung durchgeführt werden. Der Koeffizientenvergleich soll z.B. in den Ausdruck $a_{ij}x^j\mathbf{f}^i = \lambda x^i \mathbf{f}_i$ nicht durchgeführt werden.
e) Gleichung $a^i{}_j x^j = \lambda x^i$ aus (a) in Matrixschreibweise $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$
Wenn det $\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0$, existiert nicht-triviale Lösungen.
Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und Rechtseigenvektor z.B. $(x^1, x^2) = (1, -1) \to \mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$
Eigenwert $\lambda_2 = -1$ und Rechtseigenvektor z.B. $(x^1, x^2) = (1, -2) \to \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2$

(Hinweise : ersetze in der Eigenwertgleichung λ durch 2 (oder -1) und x^1 durch 1. Dann berechne x^2)

Gleichung $y_i a^i{}_j = \lambda y_i$ aus (b) in Matrixschreibweise $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$

Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und Rechtseigenvektor z.B. $(y_1, y_2) = (1, 1/2) \to \mathbf{y}^1 = \mathbf{f}^1 + (1/2)\mathbf{f}^2$

Eigenwert $\lambda_2 = -1$ und Rechtseigenvektor z.B. $(y_1, y_2) = (1, 1) \to \mathbf{y}^2 = \mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2$

f) $\mathbf{y}^1 \cdot \mathbf{x}_2 = 1 - 1 = 0$, $\mathbf{y}^2 \cdot \mathbf{x}_1 = 1 - 1 = 0$,

$\mathbf{y}^1 \cdot \mathbf{x}_1 = 1 - 1/2 = 1/2 \to \mathbf{x}^1 = 2\mathbf{y}^1 = 2\mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2$

$\mathbf{y}^2 \cdot \mathbf{x}_2 = 1 - 2 = -1 \to \mathbf{x}^2 = -\mathbf{y}^2 = -\mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^2$

Anmerkung : Für nicht-selbstadjungierte Matrizen kann die Eigenvektoren eine nicht-orthogonale Basis bilden. Die Links- und Rechtseigenvektoren sind die dualen Basisvektoren zu einander.

g) $a'^i{}_j = \mathbf{x}^i \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x}_j = \lambda_{\underline{i}} \delta^{\underline{i}}_j$

h) Annahme : $\mathbf{e}_1 = c\mathbf{f}_1$, Normierung : $c^2 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = c^2 g_{11} = c^2 = 1 \to \mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$

$\mathbf{e}_2$ ist orthogonal zum Vektor $\mathbf{e}_1$ und auch zum $\mathbf{f}_1 \to \mathbf{e}_2 = c\mathbf{f}^2$,

wobei $c = 1/\sqrt{g^{22}}$ und $\mathbf{f}^2 = g^{2i}\mathbf{f}_i$ mit $\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}^2 = -2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$

$\to \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$