6. Tutorium **für 25.11.2022**

6.1 Lokale Transformation

Ein Vektor $\mathbf{x}$ lässt sich in der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eines kartesischen Koordinatensystems als $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ darstellen. Die Transformation von kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2) = (x, y)$ in Polarkoordinaten $(x'^1, x'^2) = (r, \theta)$ ist nicht linear und durch $x(r, \theta) = r\cos\theta$ und $y(r, \theta) = r\sin\theta$ $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ definiert.
a) Existiert die ortsunabhängige (globale) Transformationsmatrix $\mathbf{T}$, die durch $x'^i = t^i{}_j x^j$ definiert ist?
b) Mithilfe der Taylorentwicklung linearisieren Sie die Koordinatentransformation, $x(r+dr, \theta+d\theta)$ und $y(r+dr, \theta+d\theta)$ um die Entwicklungsstelle (r, θ) und bestimmen Sie die Elemente $s^i{}_j$ der ortsabhängigen (lokalen) Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ für die infinitesimale Änderungen $dx^1 = x(r + dr, \theta + d\theta) - x(r, \theta)$, $dx^2 = y(r + dr, \theta + d\theta) - y(r, \theta)$, $dx'^1 = dr$ und $dx'^2 = d\theta$. Die Matrix $\mathbf{S}$ ist durch $dx^i = s^i{}_j dx'^j$ definiert.
c) Die lokalen Basisvektoren $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ der Polarkoordinaten sind durch $dx^i\mathbf{e}_i = dx'^i\mathbf{f}_i$ definiert. Mit Verwendung der Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ aus (b) stellen Sie die Basisvektoren $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ dar.
d) Skizzieren Sie die Basisvektoren $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ an dem Punkt $(r, \theta) = (1, \pi/6)$ im kartesischen Koordinatensystem.
e) Berechnen Sie das Fächenelement dF als die Fläche des von den Vektoren $dx^1\mathbf{e}_1$ und $dx^2\mathbf{e}_2$ gebildeten Parallelogramms und auch als die Fäche des von den Vektoren $dx'^1\mathbf{f}_1$ und $dx'^2\mathbf{f}_2$ gebildeten Parallelogramms. Zeigen Sie, $dxdy = |\det\mathbf{S}|drd\theta$.
f) Berechnen Sie g'_{ij} und g'^{ij} der Polarkoordinaten und zeigen Sie, $|\det\mathbf{S}| = \sqrt{\det\mathbf{g}}$.

6.2 Krummlinige Koordinaten

Betrachten Sie eine lokale Transformation $dx^i\mathbf{e}_i = dx'^i\mathbf{f}_i$ zwischen der Standardbasis $\mathbf{e}_i$ und der ortsabhängigen Basis $\mathbf{f}_i$ krummliniger Koordinaten. Die Transformation der Basisvektoren lässt sich mit einer Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ als $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ schreiben.
a) Berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{f}^i$ mit den folgenden Schritten.

1) Zeigen Sie $\nabla x'^i = \mathbf{f}^i$.
2) Berechnen Sie $\nabla \times \mathbf{f}^i$.

b) Berechnen Sie $\nabla \cdot (\frac{1}{W}\mathbf{f}_i)$ mit den folgenden Schritten, wobei $W = \det\mathbf{S}$.

1) Zeigen Sie $\mathbf{f}_i = \varepsilon_{ijk} c \mathbf{f}^j \times \mathbf{f}^k$ (ohne Summe über j und k) und bestimmen Sie die Konstante c.
2) Zeigen Sie mithilfe der Indexschreibweise die Identität
$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$.
3) Berechnen Sie $\nabla \cdot (\frac{1}{W}\mathbf{f}_i)$.

c) Zeigen Sie für ein ortsabhängiges Skalarfeld $\psi(\mathbf{x})$.

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{W}\partial'_i \left(W g'^{ij}\partial'_j\psi(\mathbf{x})\right)$$

wobei $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'^i}$ und g'^{ij} die Elemente des metrischen Tensors von der krummliniger Koordinaten sind.
d) Schreiben Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$, gegeben durch die Koordinatentransformation $x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$, wobei $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$.
e) Schreiben Sie den Laplace-Operator in Paraboloid-Koordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (u, v, \phi)$, gegeben durch die Koordinatentransformation $x = uv\cos\phi, \quad y = uv\sin\phi, \quad z = (u^2 - v^2)/2$, wobei $u, v \geq 0$, und $0 \leq \phi < 2\pi$.
f) Das Volumenelement dV ist als das Volumen des von den Vektoren $dx'^1\mathbf{f}_1$, $dx'^2\mathbf{f}_2$, $dx'^3\mathbf{f}_3$ gebildeten Parallelepipedes definiert. Berechnen Sie dV der Paraboloid-Koordinaten.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2cd, 2ef