6. Tutorium - Lösungen **25.11.2022**

6.1 Lokale Transformation

a) $x'^i = t^i{}_j x^j$ ist eine lineare Transformation, z.B., $r = t^1{}_1 x + t^1{}_2 y$. Anderseits ist die Koordinatentransformation ist nicht linear $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und es ist nicht möglich, dass diese nicht lineare Funktion $\sqrt{x^2+y^2}$ als eine lineare Funktion $t^1{}_1 x + t^1{}_2 y$ mit konstanten $t^1{}_1$ und $t^1{}_2$. Deswegen existiert nicht die ortsunabhängige Transformationsmatrix $\mathbf{T}$.
Alternative :
Wenn eine ortsunabhängige lineare Transformation $x'^i = t^i{}_j x^j$ existieren würde:
Eine kartesischen Koordinaten, z.B., $(x^1, x^2) = (1, 0)$ entsprechen
zur Polarkoordinaten $(x'^1, x'^2) = (1, 0) \to t^1{}_1 = 1$ und $t^2{}_1 = 0$
Eine andere kartesischen Koordinaten, z.B., $(x^1, x^2) = (0, 1)$ entsprechen
zur Polarkoordinaten $(x'^1, x'^2) = (1, \pi/2) \to t^1{}_2 = 1$ und $t^2{}_2 = \pi/2$
Eine andere kartesischen Koordinaten, z.B., $(x^1, x^2) = (1, 1)$ entsprechen
zur Polarkoordinaten $(x'^1, x'^2) = (\sqrt{2}, \pi/4)$.
Anderseits $\begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ t^1{}_1 & t^1{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi/4 \end{pmatrix}$
$\to$ Die Koordinatentransformation muss linear und ortsabhängig (oder nicht-linear) sein.
b)Taylorentwicklung:
$x(r+dr, \theta+d\theta) \simeq x(r,\theta) + \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = x(r,\theta) + \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$ und
$y(r+dr, \theta+d\theta) \simeq y(r,\theta) + \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = y(r,\theta) + \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r+dr,\theta+d\theta) - x(r,\theta) \\ y(r+dr,\theta+d\theta) - y(r,\theta) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \end{pmatrix}$$

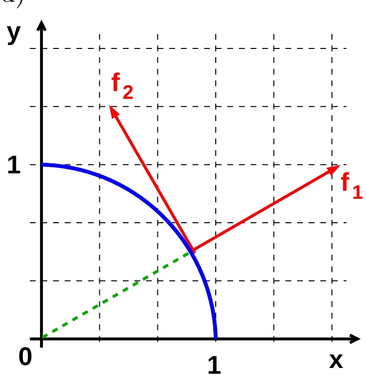
Anmerkung: Im Allgemeinen

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r+dr,\theta+d\theta) - x(r,\theta) \\ y(r+dr,\theta+d\theta) - y(r,\theta) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial'_1 x^1 & \partial'_2 x^1 \\ \partial'_1 x^2 & \partial'_2 x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \end{pmatrix}$$

$\to s^i{}_j = \partial'_j x^i$
c) Wenn $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j a^j{}_i$, gilt $dx^j \mathbf{e}_j = dx'^i \mathbf{f}_i = dx'^i \mathbf{e}_j a^j{}_i$.
Koeffizientenvergleich : $dx^j = dx'^i a^j{}_i$. Aus (b) gilt $a^j{}_i = s^j{}_i$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \to \mathbf{f}_1 = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2 \text{ und } \mathbf{f}_2 = -r\sin\theta \mathbf{e}_1 + r\cos\theta \mathbf{e}_2$$

d)



e) $dF = |(dx^1 \mathbf{e}_1) \times (dx^2 \mathbf{e}_2)| = dx^1 dx^2 |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| = dx^1 dx^2 = dxdy$
In Polarkoordinaten
$dF = |(dx'^1 \mathbf{f}_1) \times (dx'^2 \mathbf{f}_2)| = |(dx'^1 s^i{}_1 \mathbf{e}_i) \times (dx'^2 s^j{}_2 \mathbf{e}_j)|$
$= dx'^1 dx'^2 |(s^1{}_1 s^2{}_2 - s^2{}_1 s^1{}_2) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| = dx'^1 dx'^2 |\det \mathbf{S}| = r dr d\theta$
f) $g'_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = s^k{}_i \mathbf{e}_k \cdot s^\ell{}_j \mathbf{e}_\ell = s^k{}_i s^k{}_j$

$$\to \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g'^{11} & g'^{12} \\ g'^{21} & g'^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

6.2 Krummliniger Koordinaten

Ein Zeil des Beispiels ist die Darstellung des Laplace-Operators in einem krummlinigen Koordinatensystem. Die Rechnung $\nabla\cdot(\nabla\psi(\mathbf{x})) = \nabla\cdot\big(\mathbf{f}_j \partial'^j \psi(\mathbf{x})\big)$ erfordert nicht nur die Ableitungen des Skalarfeldes $\psi(\mathbf{x})$ sondern

auch Ableitungen der ortsabhängigen Basisvektoren. Die Unterpunkte a) und b) sind einige Hinweise füer die Rechnung der Ableitungen von $\mathbf{f}_j$.
a1) $\nabla x'^i = \mathbf{f}^j \partial'_j x'^i = \mathbf{f}^j \delta^i_j = \mathbf{f}^i$
a2) Aus dem Ergebnis (a1) $\nabla \times \mathbf{f}^i = \nabla \times (\nabla x'^i)$
Das Ergebnis des Ausdrucks $\nabla \times (\nabla x'^i)$ muss von Basis unabhängig sein. Wir rechnen ihn in der Orthonormalbasis
$\nabla \times (\nabla x'^i) = \varepsilon^{jk\ell} \mathbf{e}_j \partial_k \partial_\ell x'^i = \mathbf{e}_1(\partial_2\partial_3 x'^i - \partial_3\partial_2 x'^i) + \mathbf{e}_2(\partial_3\partial_1 x'^i - \partial_1\partial_3 x'^i) + \mathbf{e}_3(\partial_1\partial_2 x'^i - \partial_2\partial_1 x'^i) = 0$
b1) $\mathbf{f}_1$ ist orthogonal zu $\mathbf{f}^2$ und $\mathbf{f}^3 \to \mathbf{f}_1 = c\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3$
Normierung : $\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 = 1 \to c\mathbf{f}^1 \cdot (\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3) = 1 \to c = 1/(\mathbf{f}^1 \cdot (\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3)) = 1/\det\mathbf{T} = \det\mathbf{S} = W$, wobei $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$
Auf die gleiche Weise $\mathbf{f}_2 = W\,\mathbf{f}^3 \times \mathbf{f}^1$, $\mathbf{f}_3 = W\,\mathbf{f}^1 \times \mathbf{f}^2$.
b2) Beweis in der Standardbasis
$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (a^i \mathbf{e}_i \times b^j \mathbf{e}_j) = \nabla \cdot (a^i b^j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \nabla \cdot (a^i b^j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^k) = \mathbf{e}_\ell \partial^\ell \cdot (a^i b^j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^k) = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}^k \partial^\ell (a^i b^j)$
$= \varepsilon_{ijk} \delta^k_\ell \partial^\ell (a^i b^j) = \varepsilon_{ijk}((\partial^k a^i) b^j + a^i (\partial^k b^j)) = (\nabla \times \mathbf{a})_j b^j - a^i (\nabla \times \mathbf{b})_i = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$
b3) $\nabla \cdot (\frac{1}{W}\mathbf{f}_1) = \nabla \cdot (\mathbf{f}^2 \times \mathbf{f}^3) = (\underbrace{\nabla \times \mathbf{f}^2}_{=0}) \cdot \mathbf{f}^3 - \mathbf{f}^2 \cdot (\underbrace{\nabla \times \mathbf{f}^3}_{=0}) = 0$
Auf die gleiche Weise $\nabla \cdot (W^{-1}\mathbf{f}_2) = 0$ und $\nabla \cdot (W^{-1}\mathbf{f}_3) = 0$
c) $\nabla \cdot (\nabla \psi(\mathbf{x})) = \mathbf{f}^i \cdot \partial'_i \left(\mathbf{f}_j \partial'^j \psi(\mathbf{x})\right) = \mathbf{f}^i \cdot \partial'_i \left((W\partial'^j \psi(\mathbf{x}))(W^{-1}\mathbf{f}_j)\right)$
$= \mathbf{f}^i \cdot (W^{-1}\mathbf{f}_j)\partial'_i (W\partial'^j \psi(\mathbf{x})) + (W\partial'^j \psi(\mathbf{x}))\underbrace{\mathbf{f}^i \cdot \partial'_i (W^{-1}\mathbf{f}_j)}_{=\nabla\cdot(W^{-1}\mathbf{f}_j)=0} = W^{-1}\delta^i_j \partial'_i (W\partial'^j \psi(\mathbf{x})) = W^{-1}\partial'_j (W\partial'^j \psi(\mathbf{x})) =$
$W^{-1}\partial'_j (W g^{ij} \partial'_i \psi(\mathbf{x}))$
d)$dx^i = (\partial'_j x^i) dx'^j \equiv s^i{}_j dx'^j \to s^i{}_j = \partial'_j x^i$

$$\begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 & s^1{}_3 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 & s^2{}_3 \\ s^3{}_1 & s^3{}_2 & s^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \det\mathbf{S} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3 = r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi = r^2\sin\theta$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j) = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}/\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$\nabla \cdot (\nabla\psi(\mathbf{x})) = W^{-1}\partial'_j (W g^{ij} \partial'_i \psi(\mathbf{x})) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\partial'_1(r^2\sin\theta\partial'_1\psi(\mathbf{x})) + \partial'_2(\sin\theta\partial'_2\psi(\mathbf{x})) + \partial'_3(\sin^{-1}\theta\partial'_3\psi(\mathbf{x}))\right)$
$= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\psi(\mathbf{x})) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\psi(\mathbf{x})) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial^2_\phi\psi(\mathbf{x})$
e) $s^i{}_j = \partial'_j x^i$

$$\begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 & s^1{}_3 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 & s^2{}_3 \\ s^3{}_1 & s^3{}_2 & s^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\phi & u\cos\phi & -uv\sin\phi \\ v\sin\phi & u\sin\phi & uv\cos\phi \\ u & -v & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \det\mathbf{S} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_3 = u^3v\cos^2\phi + uv^3\sin^2\phi + u^3v\sin^2\phi + uv^3\cos^2\phi = uv(u^2+v^2)$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j) = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} u^2+v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2+v^2 & 0 \\ 0 & 0 & u^2v^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(u^2+v^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(u^2+v^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(u^2v^2) \end{pmatrix}$$

$\nabla\cdot(\nabla\psi(\mathbf{x})) = W^{-1}\partial'_j(Wg^{ij}\partial'_i\psi(\mathbf{x})) = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left(\partial'_1(uv\partial'_1\psi(\mathbf{x})) + \partial'_2(uv\partial'_2\psi(\mathbf{x})) + \partial'_3((u^2+v^2)/(uv)\partial'_3\psi(\mathbf{x}))\right)$
$= \frac{1}{u(u^2+v^2)}\partial_u(u\partial_u\psi(\mathbf{x})) + \frac{1}{v(u^2+v^2)}\partial_v(v\partial_v\psi(\mathbf{x})) + \frac{1}{u^2v^2}\partial^2_\phi\psi(\mathbf{x})$
f) $dV = dx'^1\mathbf{f}_1 \cdot (dx'^2\mathbf{f}_2 \times dx'^3\mathbf{f}_3) = dx'^1dx'^2dx'^3\det\mathbf{S} = uv(u^2+v^2)dudvd\phi$
Anmerkung : Die Matrix $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ der **lokalen** Koordinatentransformation ist nicht auf den **globalen** Koordinaten anwendbar, d.h. $dx'^i = t^i{}_j dx^j$ aber $x'^i \neq t^i{}_j x^j$ oder $\mathbf{dx} = dx^i\mathbf{e}_i = dx'^i\mathbf{f}_i$ aber $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i \neq x'^i\mathbf{f}_i$.
Z.B., in Kugelkoordinaten $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = r\mathbf{f}_1$
in Paraboloid-Koordinaten $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = (u\mathbf{f}_1 + v\mathbf{f}_2)/2$