7. Tutorium **für 2.12.2022**

7.1 Delta-Distribution

Betrachten Sie die folgende Funktion mit einer positiven Konstante a

$$\Theta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie das Integral für eine Konstante x_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(x - x_0)dx\,.$$

b) Berechnen Sie für eine positive Ganzzahl n und eine Konstante x_0 das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^n \Theta_a(x - x_0)dx\,.$$

c) Für eine analytische Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ (x_0 : Konstante, $f^{(n)}$: n-te Ableitung von f), berechnen Sie den Ausdruck

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Theta_a(x - x_0)dx\,.$$

d) Skizzieren Sie die Funktionen $\Theta_{a=1}(x - 10)$ und $\Theta_{a=1}(2(x - 10))$ und berechnen Sie die Ausdrücke

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(x - x_0)dx \quad \text{und} \quad \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_a(2(x - x_0))dx\,.$$

e) Skizzieren Sie die Funktion in den Bereich $0 \leq x \leq \pi$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} a \sin(x_k)\, \Theta_a(x - x_k)$$

wobei $a = \pi/N$, $x_k = ak$ und $N = 10$.

7.2 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion

Berechnen Sie die folgenden Integrale für die Delta-Distribution $\delta(x)$ und die Heaviside-Funktion $H(x)$.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\ (x^2 + 2xy)\ \delta(3x - 2y - 1)\ \delta(2x + 4y - 6)$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\delta(2x^2 - 8x + 6)$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\ H(1 - x^2 - y^2 - z^2)$

7.3 n-dimensionale Kugel

Das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R ($R > 0$) ist mithilfe der Heaviside-Funktion $H(R)$ durch

$$V_n(R) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; H\left(R^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

gegeben. Das Volumen $V_n(R)$ lässt sich durch $V_n(R) = R^n V_n(1)$ ausdrücken, wobei $V_n(1)$ das Volumen mit Radius 1 ist.
a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; \delta\left(R^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

und schreiben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von R und $V_n(1)$ an.
b) Berechnen Sie die Oberfäche der Kugel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; \delta\left(R - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

und schreiben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von R und $V_n(1)$ an.

7.4 Cauchyscher Hauptwert

a) Zeigen Sie, dass für $R > 0$ gilt

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{2R}\,.$$

Hinweis: $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ wenn $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
b) Berechnen Sie für konstante k (> 0 und $\in \mathbb{R}$) und z_0 ($\in \mathbb{C}$) das Integral

$$\int_{C_1} \frac{e^{ikz}}{z - z_0} dz$$

im Limes $R \to \infty$, wobei $C_1 = \{Re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$ ein offner und oberer Halbkreis mit Radius R in der komplexen Zahlenebene ist.
c) Berechnen Sie für konstante k (> 0 und $\in \mathbb{R}$) und x_0 ($\in \mathbb{R}$) den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{x - x_0 - i\varepsilon} dx\,.$$

d) Berechnen Sie für konstante k (> 0 und $\in \mathbb{R}$) und x_0 ($\in \mathbb{R}$) den Cauchyschen Hauptwert

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{x - x_0} dx\,.$$

Ankreuzbar: 1a-e, 2a-c, 3ab, 4a-c, 4d