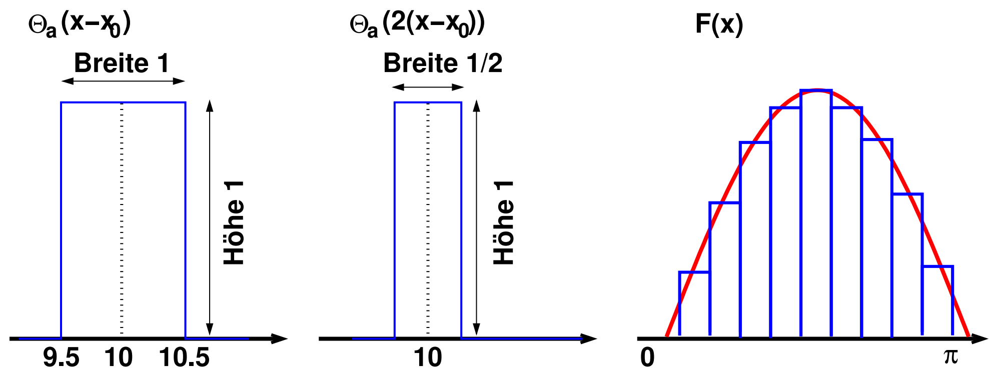
7. Tutorium - Lösungen **2.12.2022**

7.1 Delta-Distribution

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_a(x-x_0)dx = \int_{-\infty}^{-a/2}\Theta_a(x-x_0)dx + \int_{-a/2}^{a/2}\Theta_a(x-x_0)dx + \int_{a/2}^{\infty}\Theta_a(x-x_0)dx = \int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{a}dx = 1$
b) Variablentransformation $y = x - x_0$:
$\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^n\Theta_a(x-x_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty}y^n\Theta_a(y)dy = \int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{a}y^n dy = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^n\left(1-(-1)^{n+1}\right)$
c) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\Theta_a(x-x_0)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^n\Theta_a(x-x_0)dx = f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^n\left(1-(-1)^{n+1}\right)$
Im Limes $a\to 0$, $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\Theta_a(x-x_0)dx \to f(x_0)$
d) $\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_a(x-x_0)dx$ ist die Fläche eines Rechteck mit Breite a und Höhe $1/a$, d.h. die Fläche ist 1 (unabhängig von a).
$\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_a(2(x-x_0))dx$ ist die Fläche eines Rechteck mit Breite $a/2$ und Höhe $1/a$, d.h. die Fläche ist 1/2 (unabhängig von a).



e) Anmerkung : Im Limes $a\to 0$, $\lim_{a\to 0}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)a\Theta_a(x-x_k) = \int_0^{\pi}f(x')\delta(x-x')dx' = f(x)$
$F(x)$ ist oft in numerischen Rechnungen als eine Näherung der Funktion $f(x)$ auf eine diskreten Gitter verwendet.

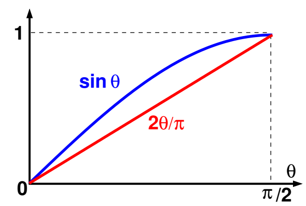
7.2 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion

a) Variablentransformation $t = 3x-2y-1$: $y(t) = (3x-1-t)/2$ und $dy = -(1/2)dt$,
$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy(x^2+2xy)\delta(3x-2y-1)\delta(2x+4y-6) = \int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{\infty}^{-\infty}dt\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+2xy(t))\delta(t)\delta(2x+4y(t)-6)$
$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx(x^2+x(3x-1))\delta(8x-8) = \frac{3}{16}$
b) Variablentransformation $t = 2x^2-8x+6$:
$x_\pm(t) = 2\pm\sqrt{t/2+1}$ und $dt/dx = 4x-8$ ($x_+(0)=3$ und $x_-(0)=1$)
Wenn $-\infty < x < 2$, $\infty > t > -2$ und $dt/dx = 4x_-(t)-8$
Wenn $2 < x < \infty$, $-2 < t < \infty$ und $dt/dx = 4x_+(t)-8$
$\int_{-\infty}^{\infty}x\delta(2x^2-8x+6)dx = -\int_{\infty}^{-2}x_-(t)\delta(t)\frac{1}{4x_-(t)-8}dt + \int_{-2}^{\infty}x_+(t)\delta(t)\frac{1}{4x_+(t)-8}dt = -\frac{x_-(0)}{4x_-(0)-8}+\frac{x_+(0)}{4x_+(0)-8} = 1$
alternativ : $\delta(2x^2-8x+6) = \frac{1}{|4x-8|}(\delta(x-3)+\delta(x-1))$
$\int_{-\infty}^{\infty}x\delta(2x^2-8x+6)dx = \int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{|4x-8|}(\delta(x-3)+\delta(x-1))dx = 1$
c) $1-x^2-y^2-z^2 > 0 \to x^2+y^2+z^2 < 1$: das Volumen einer Kugel mit Radius 1
$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz\ H(1-x^2-y^2-z^2) = \frac{4}{3}\pi$
alternative : Variablentransformation zu den Kugelkoordinaten $(x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$
Volumenelement : $dxdydz = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$ (siehe Bsp.6.2)
$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz\ H(1-x^2-y^2-z^2) = \int_0^{\infty}dr\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\, r^2\sin\theta H(1-r^2)$
$= 4\pi\int_0^{\infty}dr\, r^2H(1-r^2) = \frac{4}{3}\pi$

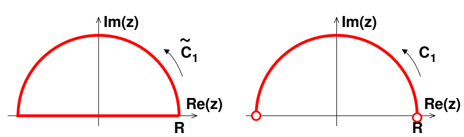
7.3 n-dimensionale Kugel

a) Variablentransformation : $t = R^2$ oder $R(t) = \sqrt{t}$
$V_n(R(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H\left(t - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = t^{n/2} V_n(1)$
$\frac{d}{dt} V_n(R(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} H\left(t - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$
anderseits $\frac{d}{dt} V_n(R(t)) = \frac{d}{dt} t^{n/2} V_n(1) = \frac{n}{2} t^{n/2-1} V_n(1)$
$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{n}{2} t^{n/2-1} V_n(1) = \frac{n}{2} R^{n-2} V_n(1)$.
b) Da, für $R > 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2$ und $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < R$ einen gleichen Bereich darstellen, gilt
$H\left(R^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = H\left(R - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$
$\frac{d}{dR} V_n(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dR} H\left(R^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dR} H\left(R - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$
$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(R - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = nR^{n-1} V_n(1)$
Anmerkung : $H(x)$ ist gleich 1 oder 0 und dimensionslos. Deswegen $H(x^2 - x_0^2)$ und $H(x - x_0)$ im Bereich $x > 0$ gleich sind. Anderseits hat $\delta(x)$ die Dimension von $1/x$ (z.B. siehe Bsp.7.1, Θ_a ist gleich $1/a$ oder 0). Im Bereich $x > 0$ gilt $\delta(x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2|x_0|}\delta(x - |x_0|)$.

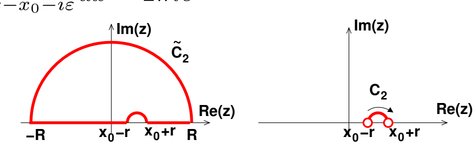
7.4 Cauchyscher Hauptwert



a) Da $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ für $0 \leq \theta \leq \pi/2$, gilt $-R\sin\theta \leq -\frac{2R}{\pi}\theta$
oder, entsprechend, $e^{-R\sin\theta} \leq e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}$
$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{2R}$ für $R > 0$
b) Variablentransformation $z = Re^{i\theta}$
$\int_{C_1} \frac{e^{ikz}}{z - z_0} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{ikRe^{i\theta}} e^{ikz_0}}{Re^{i\theta} - z_0} iRe^{i\theta} d\theta$
$= \int_0^{\pi} i \frac{e^{ikRe^{i\theta}} e^{ikz_0}}{1 - z_0 e^{-i\theta}/R} d\theta = \int_0^{\pi} i \frac{e^{ik(R\cos\theta + z_0) - kR\sin\theta}}{1 - z_0 e^{-i\theta}/R} d\theta$
$\rightarrow \left|\int_0^{\pi} ie^{ik(R\cos\theta + z_0) - kR\sin\theta} d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} \left| i \frac{e^{ik(R\cos\theta + z_0) - kR\sin\theta}}{1 - z_0 e^{-i\theta}/R} \right| d\theta = \int_0^{\pi} \frac{|e^{-kR\sin\theta}|}{|1 - z_0 e^{-i\theta}/R|} d\theta \leq \frac{1}{M(R)} \int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta} d\theta$
wobei $M(R) = \min_{\theta\in[0,\pi]} |1 - z_0 e^{-i\theta}/R|$ mit $\lim_{R\to\infty} M(R) = 1$ (wenn R groß genug ist, $M(R) > 0$)).
Aus (a) $\frac{1}{M(R)} \int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta} d\theta = \frac{2}{M(R)} \int_0^{\pi/2} e^{-kR\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{kRM(R)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$



c) $\tilde{C}_1 = C_1 + \{z = x| - R < x < R\}$
ist der geschlossene obere Halbkreis.
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{x - x_0 - i\varepsilon} dx = \lim_{R\to\infty} \left[\int_{\tilde{C}_1} \frac{e^{izk}}{z - x_0 - i\varepsilon} dz - \int_{C_1} \frac{e^{izk}}{z - x_0 - i\varepsilon} dz\right]$
Residuensatz : wenn $z = x_0 + i\varepsilon$ innerhalb $\tilde{C}_1$ ist, gilt $\int_{\tilde{C}_1} \frac{e^{izk}}{z - x_0 - i\varepsilon} dz = 2\pi i e^{ikx_0 - k\varepsilon}$.
Aus (b), gilt $\int_{C_1} \frac{e^{izk}}{z - x_0 - i\varepsilon} dz = 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{x - x_0 - i\varepsilon} dx = 2\pi i e^{ikx_0 - k\varepsilon}$. Im Limes $\varepsilon \to 0^+$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{x - x_0 - i\varepsilon} dx = 2\pi i e^{ikx_0}$



d) $C_2 = \{x_0 + re^{i\theta} | \pi > \theta > 0\}$ und
$\tilde{C}_2 = C_1 + C_2 + \{z| - R < z < x_0 - r\} + \{z | x_0 + r < z < R\}$
$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{x - x_0} dx = \lim_{r\to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - r} \frac{e^{ixk}}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + r}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{x - x_0} dx\right]$
$= \lim_{r\to 0^+} \lim_{R\to\infty} \left[\int_{\tilde{C}_2} \frac{e^{izk}}{z - x_0} dz - \int_{C_1} \frac{e^{izk}}{z - x_0} dz - \int_{C_2} \frac{e^{izk}}{z - x_0} dz\right]$
$z = x_0$ ist ausserhalb $\tilde{C}_2$: $\int_{\tilde{C}_2} \frac{e^{izk}}{z - x_0} dz = 0$, Aus (b), gilt $\int_{C_1} \frac{e^{izk}}{z - x_0} dz = 0$
Variablentransformation $z = x_0 + re^{i\theta}$: $\int_{C_2} \frac{e^{izk}}{z - x_0} dz = \int_{\pi}^{0} ie^{ikx_0} e^{ikre^{i\theta}} d\theta \xrightarrow{r\to 0^+} \int_{\pi}^{0} ie^{ikx_0} d\theta = -i\pi e^{ikx_0}$
Hauptwert : $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{x - x_0} dx = i\pi e^{ikx_0}$
Anmerkung : Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx$ divergiert wegen der Singularität um $x = x_0$. In Physik wird eine der Nährungen (z.B. c und d) des Integrals oft verwendet. Die Beziehung zwischen dem Grenzwert und dem Haputwert ist bekannt: Sokhotski-Plemelj-Formeln $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon} dx = \mp i\pi\varphi(x_0) + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx$
zusätzliche Fragen :
1) Berechnen Sie den Hauptwert mit C_2 als einen unteren Halbkreis, definiert durch $C_2 = \{x_0 + re^{i\theta} | \pi < \theta < 2\pi\}$. (Lösung: $i\pi e^{ikx_0}$)
2) Berechnen Sie den Grenzwert mit $\varepsilon \to 0^-$ (c) und den Hauptwert (d) für $k < 0$. (Lösung: (c) $-2\pi i e^{ikx_0}$, (d) $-i\pi e^{ikx_0}$)