8. Tutorium **für 9.12.2022**

8.1 Verallgemeinerte Funktion

a) Die Funktion $f(t,x) = (4\pi Dt)^{-1/2} e^{-x^2/(4Dt)}$ ist eine Lösunge der Differentialgleichung $\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(t,x) = 0$ $(t > 0)$, wobei D eine positive Konstante ist. Zeigen Sie, $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) H(t) f(t,x) = \delta(t)\delta(x)$ ($H(t)$: Heaviside-Funktion).

Hinweis: Zeigen Sie, durch Anwenden auf eine Testfunktion die Funktion gilt $\lim_{t\to 0} f(t,x) = \delta(x)$.

b) Berechnen und vereinfachen Sie für eine positive Konstante v den folgenden Anudruck

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) H\left(t - \frac{|x|}{v}\right)$$

c) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty f'(x)\, \sin x\, dx \quad \left(f(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \le \pi/2) \\ 0 & (|x| > \pi/2) \end{cases} \right)$

8.2 Greensche Funktion I

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = f(t)$, wobei der Differentialoperator ist gegeben, durch

$$\mathcal{L}_t = \left(\frac{d}{dt} + \gamma + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} + \gamma - i\omega\right) .$$

a) Schreiben Sie zwei lineare unabhängige Lösungen, $x_1(t)$ und $x_2(t)$, der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = 0$ an. Nehmen Sie an, dass die Lösungen die Randbedingung $x_k(t=0) = 1$ $(k = 1, 2)$ erfüllen.

Die Greensche Funktion erfüllt die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t - t')$. Das heißt, dass die Greensche Funktion die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = 0$ außer $t = t'$ erfüllt. Zusätzlich hängt die Greensche Funktion, wegen der Translationsinvarianz, nur von der Differenz $t - t'$ ab, d.h. $G(t,t') = G(t - t', 0)$. Mithilfe der Lösungen aus (a) kann die Greensche Funktion als

$$G(t,t') = G(t-t',0) = \begin{cases} a_1 x_1(t-t') + a_2 x_2(t-t') & (t < t') \\ b_1 x_1(t-t') + b_2 x_2(t-t') & (t' < t) \end{cases} ,$$

geschrieben werden.

b) Zeigen Sie, $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Hinweis: Die Greensche Funktion ist stetig, d.h. $\lim_{t\to t'^-} G(t,t') = \lim_{t\to t'^+} G(t,t')$.

c)Aus der imhomogenen Gleichung folgt $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \mathcal{L}_t G(t,t') dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t - t') dt = 1$. Bestimmen Sie die Koeffizienten b_1 und b_2 und schreiben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von a_1 und a_2 an.

8.3 Greensche Funktion II

Die Greensche Funktion $G(t,t')$ erfüllt die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$. Der Differentialoperator ist gegeben, durch

$$\mathcal{L}_t = \frac{d^2}{dt^2} - 4i\frac{d}{dt} - 5\,.$$

a) $\psi_\omega(t) = e^{i\omega t}$ ist eine Eigenfunktion des Differentialoperators $\mathcal{L}_t$, d.h. $\mathcal{L}_t\psi_\omega(t) = \lambda(\omega)\psi_\omega(t)$. Berechnen Sie den Eigenwert $\lambda(\omega)$.
b) Zufolge des Spektraltheorems kann der Differentialoperator $\mathcal{L}_t$ als

$$L(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\lambda(\omega)\psi_\omega(t)\psi^*_\omega(t')$$

dargestellt werden. Überprüfen Sie die Indentität $\mathcal{L}_t A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' L(t,t')A(t')$ für eine analytische Funktion $A(t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega a(\omega)\psi_\omega(t)$.
c) Die Greensche Funktion $G(t,t')$ ist die Inverse des Differentialoperators und wird als

$$G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{1}{\lambda(\omega)}\psi_\omega(t)\psi^*_\omega(t')\,.$$

dargestellt. Berechnen Sie das Integral und finden Sie eine Greensche Funktion, die die inhomogene Gleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2a-c, 3ab, 3c