8. Tutorium - Lösungen **9.12.2022**

8.1 Verallgemeinerte Funktion

a) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) H(t)f(t,x) = \delta(t)f(t,x) + H(t)\partial_t f(t,x) - DH(t)\partial_x^2 f(t,x)$
$= \delta(t)f(0,x) + H(t)\left(\partial_t f(t,x) - D\partial_x^2 f(t,x)\right) = \delta(t)f(0,x)$
$\varphi(x)$: eine Testfunktion (eine analytische Funktion)
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\sqrt{t}y)\varphi(\sqrt{t}y)\sqrt{t}dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi D}}e^{-y^2/(4D)}\varphi(\sqrt{t}y)dy$
$\xrightarrow{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi D}}e^{-y^2/(4D)}\varphi(0)dy = \varphi(0)\,.$ $\lim_{t\to 0} f(t,x)$ ist eine Delta-Distribution $\delta(x)$.
$\to \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) H(t)f(t,x) = \delta(t)\delta(x)$
zusätzliche Aufgabe : Zeigen Sie, $(\partial_t - D\partial_x^2)f(t,x) = 0$.
Anmerkung : $G(x,x';t,t') = H(t-t')\sqrt{\frac{1}{4\pi D(t-t')}}e^{-(x-x')^2/(4D(t-t'))}$ ist die Greensche Funktion der Diffusionsgleichung, $\partial_t\rho(x,t) = D\partial_x^2\rho(x,t)$
b) $\partial_t H\left(t-\frac{|x|}{v}\right) = \delta\left(t-\frac{|x|}{v}\right)$, $\partial_t^2 H\left(t-\frac{|x|}{v}\right) = \delta'\left(t-\frac{|x|}{v}\right)$,
$\partial_x H\left(t-\frac{|x|}{v}\right) = -\frac{1}{v}\partial_x|x|\delta\left(t-\frac{|x|}{v}\right) = -\frac{1}{v}(-H(-x)+H(x))\delta\left(t-\frac{|x|}{v}\right)$
$\partial_x^2 H\left(t-\frac{|x|}{v}\right) = -\frac{1}{v}(\delta(-x)+\delta(x))\delta\left(t-\frac{|x|}{v}\right) + \frac{1}{v^2}(-H(-x)+H(x))^2\delta'\left(t-\frac{|x|}{v}\right) = -\frac{2}{v}\delta(x)\delta(t) + \frac{1}{v^2}\delta'\left(t-\frac{|x|}{v}\right)$
$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) H\left(t-\frac{|x|}{v}\right) = 2v\delta(x)\delta(t)$
Anmerkung : $G(x,x';t-t') = \frac{1}{2v}H\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{v}\right)$ ist die Greensche Funktion der Wellengleichung $\partial_t^2\rho(x,t) = v^2\partial_x^2\rho(x,t)$.
c) $\int_0^{\infty} f'(x)\,\sin x\,dx = f(x)\sin x|_{x=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} f(x)\,\cos x\,dx = -\int_0^{\pi/2}\sin x\,\cos x\,dx = -\frac{1}{2}$
alternative : $f(x) = H(x+\pi/2)H(\pi/2-x)\sin x$
Ableitung : $f'(x) = \delta(x+\pi/2)H(\pi/2-x)\sin x - H(x+\pi/2)\delta(\pi/2-x)\sin x + H(x+\pi/2)H(\pi/2-x)\cos x$
$= -\delta(x+\pi/2) - \delta(\pi/2-x) + H(x+\pi/2)H(\pi/2-x)\cos x$
$\int_0^{\infty} f'(x)\,\sin x\,dx = -\int_0^{\infty}\delta(x+\pi/2)\sin x\,dx - \int_0^{\infty}\delta(\pi/2-x)\sin x\,dx + \int_0^{\pi/2}\cos x\sin x\,dx = 0-1+1/2 = -1/2$

8.2 Greensche Funktion I

a) $\left(\frac{d}{dt}+\gamma+i\omega\right)\left(\frac{d}{dt}+\gamma-i\omega\right)x(t) = 0$
$\left(\frac{d}{dt}+\gamma+i\omega\right)x(t) = 0$ oder $\left(\frac{d}{dt}+\gamma-i\omega\right)x(t) = 0$
z.B. $x_1(t) = e^{(i\omega-\gamma)t}$ und $x_2(t) = e^{(-i\omega-\gamma)t}$ $(x_1(0) = x_2(0) = 1)$
b) $\lim_{t\to t'^-} G(t,t') = a_1 + a_2$ und $\lim_{t\to t'^+} G(t,t') = b_1 + b_2$
Stetigkeit : $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$
c) $\mathcal{L}_t = \frac{d}{dt}^2 + 2\gamma\frac{d}{dt} + \gamma^2 + \omega^2$
$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\mathcal{L}_t G(t,t')dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}^2 + 2\gamma\frac{d}{dt} + \gamma^2 + \omega^2\right)G(t,t')dt$
$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{d}{dt}G(t,t')\Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} + 2\gamma\, G(t,t')|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} + \left(\gamma^2+\omega^2\right)\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}G(t,t')dt$
Wegen der Stetigkeit der Greenschen Funktion gilt, im Limes $\varepsilon\to 0^+$, $G(t,t')|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} = 0$ und $\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}G(t,t')dt = 0$
Ableitung der Greenschen Funktion : $\frac{d}{dt}G(t,t') = \begin{cases} a_1(i\omega-\gamma)x_1(t-t') + a_2(-i\omega-\gamma)x_2(t-t') & (t<t') \\ b_1(i\omega-\gamma)x_1(t-t') + b_2(-i\omega-\gamma)x_2(t-t') & (t'<t) \end{cases}$,
$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{d}{dt}G(t,t')\Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} = b_1(i\omega-\gamma) + b_2(-i\omega-\gamma) - a_1(i\omega-\gamma) - a_2(-i\omega-\gamma) = 1$
zusammen mit $a_1+a_2 = b_1+b_2$ (aus b)
$b_1 = a_1 - \frac{i}{2\omega}$ und $b_2 = a_2 + \frac{i}{2\omega}$
$G(t,t') = a_1 e^{(i\omega-\gamma)(t-t')} + a_2 e^{(-i\omega-\gamma)(t-t')} + \frac{i}{2\omega}H(t-t')\left(-e^{(i\omega-\gamma)(t-t')} + e^{(-i\omega-\gamma)(t-t')}\right)$
$= e^{-\gamma(t-t')}\left(a_1 e^{i\omega(t-t')} + a_2 e^{-i\omega(t-t')} + \frac{1}{\omega}H(t-t')\sin(\omega(t-t'))\right)$

Alternative :
Der Ansatz in der Angabe kann mithilfe der Heavisidefunktion als
$G(t,t') = H(t'-t)\left[a_1 e^{(i\omega-\gamma)(t-t')} + a_2 e^{(-i\omega-\gamma)(t-t')}\right] + H(t-t')\left[b_1 e^{(i\omega-\gamma)(t-t')} + b_2 e^{(-i\omega-\gamma)(t-t')}\right]$
$\equiv H(t'-t)g_1(t-t') + H(t-t')g_2(t-t')$
dargestellt werden. Dieser Ansatz erfüllt die inhomogene Greensche Funktion
1.Ableitung: $\frac{d}{dt}G(t,t') = \delta(t-t')(-g_1(0)+g_2(0)) + H(t'-t)g_1'(t-t') + H(t-t')g_2'(t-t')$
Da $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ (aus b), $-g_1(0) + g_2(0) = -a_1 - a_2 + b_1 + b_2 = 0$.
$\frac{d}{dt}G(t,t') = H(t'-t)g_1'(t-t') + H(t-t')g_2'(t-t')$
2.Ableitung: $\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') = \delta(t-t')(-g_1'(0)+g_2'(0)) + H(t'-t)g_1''(t-t') + H(t-t')g_2''(t-t')$
$\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')(-g_1'(0)+g_2'(0)) + H(t'-t)(g_1''(t-t') + 2\gamma g_1'(t-t') + (\gamma^2+\omega^2)g_1(t-t'))$
$+H(t-t')(g_2''(t-t') + 2\gamma g_2'(t-t') + (\gamma^2+\omega^2)g_2(t-t')) = \delta(t-t')(-g_1'(0)+g_2'(0))$
($g_1(t)$ und $g_2(t)$ erfüllen die homogene Gleichung $\mathcal{L}_t g_k(t) = 0$.)
Wenn die Greensche Funktion die inhomogene Gleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt, gilt $-g_1'(0)+g_2'(0) = 1$.
$-g_1'(0) + g_2'(0) = (-a_1+b_1)(i\omega-\gamma) + (-a_2+b_2)(-i\omega-\gamma) = 1$
zusammen mit $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ (aus b) $\rightarrow b_1 = a_1 - \frac{i}{2\omega}$ und $b_2 = a_2 + \frac{i}{2\omega}$

8.3 Greensche Funktion II

a) $\mathcal{L}_t\psi_\omega(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} - 4i\frac{d}{dt} - 5\right)e^{i\omega t} = (-\omega^2 + 4\omega - 5)e^{i\omega t}$
Eigenwert: $\lambda(\omega) = -\omega^2 + 4\omega - 5$
b) $\mathcal{L}_t A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega a(\omega)\mathcal{L}_t\psi_\omega(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega a(\omega)\lambda(\omega)\psi_\omega(t)$
$\int_{-\infty}^{\infty} dt' L(t,t')A(t') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\lambda(\omega)\psi_\omega(t)\psi_\omega(t')\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' a(\omega')\psi_{\omega'}(t')$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\lambda(\omega)\psi_\omega(t)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' a(\omega')\delta(\omega-\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega a(\omega)\lambda(\omega)\psi_\omega(t)$
$\rightarrow \mathcal{L}_t A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' L(t,t')A(t')$
c) $\lambda(\omega) = -\omega^2 + 4\omega - 5 = -(\omega-2-i)(\omega-2+i)$
$G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{1}{\lambda(\omega)}\psi_\omega(t)\psi_\omega^*(t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-2-i)(\omega-2+i)} = -\frac{1}{4\pi i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2-i} - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2+i}\right)$
Die Integrale werden als $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega X(\omega) = \lim_{R\to\infty}\left(\oint_{\tilde{C}} dz X(z) - \int_C dz X(z)\right)$ gerechnet, wobei C ein offener oberer Halbkreis $C_o = \{z = Re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$ oder ein offener unterer Halbkreis $C_u = \{z = Re^{i\theta} | \pi < \theta < 2\pi\}$ sein kann. $\tilde{C}$ ist ein geschlossener Halbkreis, d.h. $\tilde{C} = C + \{z = \omega | -R \leq \omega \leq R\}$. Der Integrationspfad ($C = C_o$ oder C_u) wird ausgewählt sodass das Integral $\int_C dz X(z)$ verschwindet.
Wenn $C = C_o$, $\lim_{R\to\infty}\int_{C_o} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} = 0$ für $t - t' > 0$ (siehe Bsp.7.4b)
Wenn $C = C_u$, wird der Integrationsvariable durch $z(\theta) = Re^{i\theta}$ transformiert.
$\int_{C_u} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} = \int_\pi^{2\pi} d\theta iz(\theta)\frac{e^{iz(\theta)(t-t')}}{z(\theta)-z_0}$
Eine weitere Transformation $\theta = \pi + \phi$ ($z(\theta) = z(\phi+\pi) = -Re^{i\phi} = -z(\phi)$)
$\int_{C_u} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} = \int_0^{\pi} d\phi iz(\phi)\frac{e^{-iz(\phi)(t-t')}}{z(\phi)+z_0}$. Das Integral ist ähnlich wie das Integral entlang C_o aber mit $-(t-t')$ statt $(t-t')$ und mit z_0 statt $-z_0$. Im Limes $R \to \infty$ wird der Unterschied zwischen z_0 und $-z_0$ vernachlässigbar. Deswegen gilt $\int_{C_u} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} \to 0$ wenn $-(t-t') > 0$
Greensche Funktion :
$G(t,t') = -\frac{1}{4\pi i}H(t-t')\left(\oint_{\tilde{C}_o} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-2-i} - \int_{C_o} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-2+i}\right) + \frac{1}{4\pi i}H(t'-t)\left(-\oint_{\tilde{C}_u} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-2-i} + \int_{C_u} dz\frac{e^{iz(t-t')}}{z-2+i}\right)$
Wenn die Integrale entlang $\tilde{C}_o$ und $\tilde{C}_u$ im Uhrzeigersinn definiert, muss man das Vorzeichen des Integrals beachten sodass der Integrationspfad auf der reellen Achse in die richtige Richtung läuft.
$G(t,t') = -\frac{1}{2}H(t-t')e^{i(2+i)(t-t')} - \frac{1}{2}H(t'-t)e^{i(2-i)(t-t')} = -\frac{1}{2}e^{2i(t-t')}e^{-|t-t'|}$
Anmerkung: Eine Lösung der Gleichung $\mathcal{L}_t x(t) = f(t)$ wird als $x(t) = \mathcal{L}_t^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')f(t')dt'$ beschrieben. Das Integral kann mit dem Ergebnis des Bsp.8.3c oder mit der Spektralzelegung wie in der Angabe (ohne Integral in der komplexen Zahlenebene) gerechnet werden. Zum Beispiel für $f(t) = e^{i\Omega t}$,
$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')f(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{1}{\lambda(\omega)}\psi_\omega(t)\psi_\omega^*(t')\right]e^{i\Omega t'}dt' = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{1}{\lambda(\omega)}\psi_\omega(t)\delta(\Omega-\omega)$
$= \frac{1}{\lambda(\Omega)}\psi_\Omega(t)$