9. Tutorium **für 16.12.2022**

9.1 Greensche Funktion (III)

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = f(t)$. Die Eigenfunktionen $\psi_\omega(t) = e^{i\omega_t}$ des Differentialoperators $\mathcal{L}_t$ erfüllen die Eigenwertgleichung $\mathcal{L}_t \psi_\omega(t) = \lambda(\omega)\psi_\omega(t)$ mit $\lambda(\omega) = -(\omega+2)(\omega-2)$. Die Greensche Funktion

$$G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\lambda(\omega)}\psi_\omega(t)\psi_\omega^*(t')$$

erfüllt die inhomogene Gleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$. Aber, weil die Polstellen $\omega = \pm 2$ sich auf der reellen Achse befinden, divergiert das Integral. Berechnen Sie mit den folgenden Näherungen das Integral als Grenzwerte.
a) Berechnen Sie die Greensche Funktion $G_{+\varepsilon}(t,t')$ mit den verschobenen Polen $\omega = \pm 2 + i\varepsilon$ und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0^+} G_{+\varepsilon}(t,t')$.
b) Berechnen Sie die Greensche Funktion $G_{-\varepsilon}(t,t')$ mit den verschobenen Polen $\omega = \pm 2 - i\varepsilon$ und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0^+} G_{-\varepsilon}(t,t')$.
c) Lösen Sie die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = f(t)$ mit $f(t) = H(t)H(T-t)$ für $t > 0$. Die Anfangsbedingungen sind durch $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$ gegeben.
d) Lösen Sie die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = f(t)$ mit $f(t) = H(t)H(T-t)$ für $t < T$. Die Randbedingungen sind durch $x(T) = 0$ und $x'(T) = 0$ gegeben.

9.2 Sturm-Liouville-Problem

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0\,, \qquad (|x| < 1)$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$.
b) Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$xy'' + (a+1-x)y' + \lambda y = 0\,, \qquad (x > 0)$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$.

9.3 Separationsansatz und Sturm-Liouville-Problem

a) In zwei Dimensionen wird der Laplace-Operator in Polarkoordinaten (r, ϕ) als

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

dargestellt. Führen Sie den Separationsansatz $\psi(r, \theta) = P(r)Q(\phi)$ der Differentialgleichung

$$(\nabla^2 + \alpha)\psi(r, \phi) = 0$$

$(0 < r < 1$ und $0 \leq \phi < 2\pi)$ durch und schreiben Sie die Differentialgleichungen der r- und ϕ-Koordinaten an.
b) Schreiben Sie zuerst die Differentialgleichung der r-Koordinate aus (a) auf eine Eigenwertgleichung $\mathcal{L}_r P(r) = -\alpha P(r)$ mit dem Eigenwert α um. (Der Differentialoperator $\mathcal{L}_r$ ist α-unabhängig.) Danach transformieren Sie die Gleichung in die Sturm-Liouville'sche Gestalt

$$\left(\frac{d}{dr}\left[p(r)\frac{d}{dr}\right] + q(r) + \alpha\rho(r)\right) P(r) = 0$$

und bestimmen Sie $p(r)$, $q(r)$ und $\rho(r)$.
c) Nehmen Sie an, dass $P_n(r)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ die Eigenfunktion der Eigenwertgleichung $\mathcal{L}_r P_n(r) = -\alpha_n P_n(r)$ mit den Randbedingungen $P_n(0) = P_n(1) = 0$ und den Eigenwerten α_n sind. Die Eigenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis in einem Funktionenraum $\mathcal{F}$ wenn das Skalarprodukt mit der Gewichtsfunktion $\rho(r)$ definiert ist, d.h. $\int_0^1 P_n(r)P_m^*(r)\rho(r)dr = \delta_{n,m}$. Mit der Orthonormalbasis kann der Differentialoperator als

$$L(r, r') = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(r) P_n^*(r')$$

dargestellt werden. Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n P_n(r)$ in $\mathcal{F}$ gilt $\mathcal{L}_r f(r) = \int_0^1 dr' L(r, r') f(r')\rho(r')$.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 3a, 3bc