9. Tutorium - Lösungen **16.12.2022**

9.1 Greensche Funktion (III)

a) Mit den verschobenen Polen ist die Greensche Funktion gegeben durch
$G_{+\varepsilon}(t,t') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{-(\omega+2-i\varepsilon)(\omega-2-i\varepsilon)} d\omega = (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+2-i\varepsilon} - \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2-i\varepsilon}\right] d\omega$
Das Integral wird mithilfe des Konturintegrals gerechnet.
$C_o = \{z = Re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$, $\tilde{C}_o = C_o + \{x| - R < x < R\}$
$C_u = \{z = Re^{i\theta} | \pi < \theta < 2\pi\}$, $\tilde{C}_u = C_u - \{x| - R < x < R\}$
$G_{+\varepsilon}(t,t') = (8\pi)^{-1} H(t-t') \lim_{R\to\infty} \left[\int_{\tilde{C}_o} \left(\frac{e^{iz(t-t')}}{z+2-i\varepsilon} - \frac{e^{iz(t-t')}}{z-2-i\varepsilon}\right) dz - \int_{C_o} \left(\frac{e^{iz(t-t')}}{z+2-i\varepsilon} - \frac{e^{iz(t-t')}}{z-2-i\varepsilon}\right) dz\right]$
$+(8\pi)^{-1} H(t'-t) \lim_{R\to\infty} \left[- \int_{\tilde{C}_u} \left(\frac{e^{iz(t-t')}}{z+2-i\varepsilon} - \frac{e^{iz(t-t')}}{z-2-i\varepsilon}\right) dz + \int_{C_u} \left(\frac{e^{iz(t-t')}}{z+2-i\varepsilon} - \frac{e^{iz(t-t')}}{z-2-i\varepsilon}\right) dz\right]$
Im Limes $R \to \infty$, gilt $|e^{iz(t-t')}| = e^{-R(t-t')\sin\theta} \to 0$ wenn $(t-t')\sin\theta > 0$,
d.h. wenn $0 < \theta < \pi$ für $t > t'$ oder wenn $\pi < \theta < 2\pi$ für $t < t'$.
Das führt zu $\lim_{R\to\infty} \int_{C_o} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} dz = 0$ für $t > t'$ und $\lim_{R\to\infty} \int_{C_u} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} dz = 0$ für $t < t'$.
Wenn der Pol z_0 sich in der oberen komplexen Zahlenebene befindet, gilt $\oint_{\tilde{C}_u} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} dz = 0$.
$G_{+\varepsilon}(t,t') = (8\pi)^{-1} H(t-t') \lim_{R\to\infty} \oint_{\tilde{C}_o} \left(\frac{e^{iz(t-t')}}{z+2-i\varepsilon} - \frac{e^{iz(t-t')}}{z-2-i\varepsilon}\right) dz = \frac{i}{4} H(t-t') \left(e^{i(-2+i\varepsilon)(t-t')} - e^{i(2+i\varepsilon)(t-t')}\right)$
Im Limes $\varepsilon \to 0^+$, $G_{+\varepsilon}(t,t') \to \frac{i}{4} H(t-t') \left(e^{-2i(t-t')} - e^{2i(t-t')}\right) = \frac{1}{2} H(t-t') \sin(2(t-t'))$

b) Wenn der Pol z_0 sich in der unteren komplexen Zahlenebene befindet, gilt $\oint_{\tilde{C}_o} \frac{e^{iz(t-t')}}{z-z_0} dz = 0$.
$G_{-\varepsilon}(t,t') = (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+2+i\varepsilon} - \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2+i\varepsilon}\right] d\omega = -\lim_{R\to\infty} (8\pi)^{-1} H(t'-t) \lim_{R\to\infty} \oint_{\tilde{C}_u} \left(\frac{e^{iz(t-t')}}{z+2-i\varepsilon} - \frac{e^{iz(t-t')}}{z-2-i\varepsilon}\right) dz$
$= -\frac{i}{4} H(t'-t) \left(e^{i(-2-i\varepsilon)(t-t')} - e^{i(2-i\varepsilon)(t-t')}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{2} H(t'-t) \sin(2(t-t'))$
Anmerkung: Sokhotski-Plemelj-Formeln $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x-x_0 \pm i\varepsilon} dx = \mp i\pi\varphi(x_0) + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x-x_0} dx$
$\to \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x-x_0+i\varepsilon} dx - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x-x_0-i\varepsilon} dx = -2i\pi\varphi(x_0)$
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} G_{-\varepsilon}(t,t') = (8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+2+i\varepsilon} - \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2+i\varepsilon}\right] d\omega$
$= (8\pi)^{-1} \left[\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+2-i\varepsilon} - \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2-i\varepsilon}\right) d\omega - 2i\pi e^{-2i(t-t')} + 2i\pi e^{2i(t-t')}\right]$
$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} G_{+\varepsilon}(t,t') - \frac{1}{2} \sin(2(t-t')) = -\frac{1}{2} H(t'-t) \sin(2(t-t'))$
Der Unterschied $G_0(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0^+} G_{+\varepsilon}(t,t') - \lim_{\varepsilon\to 0^+} G_{-\varepsilon}(t,t') = \frac{1}{2} \sin(2(t-t'))$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_0(t,t') = 0$.
c) Lösung mit $G_{+\varepsilon}(t,t')$, $x_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{+\varepsilon}(t,t') f(t') dt' = \int_0^T \frac{1}{2} H(t-t') \sin(2(t-t')) dt'$
Wenn $0 < t < T$, $x_I(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \sin(2(t-t')) dt' = \frac{1}{2} \sin^2 t$
Wenn $t > T$, $x_I(t) = \int_0^T \frac{1}{2} \sin(2(t-t')) dt' = \frac{1}{2} \sin T \sin(2t-T)$
$x_I(0) = 0$ und $x_I'(0) = 0$ (Randbedingungen erfüllt). $x(t) = x_I(t)$
alternative 1 : Lösung mit $G_{-\varepsilon}(t,t')$, $x_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{-\varepsilon}(t,t') f(t') dt' = -\int_0^T \frac{1}{2} H(t'-t) \sin(2(t-t')) dt'$
Wenn $0 < t < T$, $x_I(t) = -\int_t^T \frac{1}{2} \sin(2(t-t')) dt' = \frac{1}{2} \sin^2(T-t)$
Wenn $t > T$, $x_I(t) = 0$
$x_I(0) = \frac{1}{2} \sin^2 T$ und $x_I'(0) = -\sin T \cos T$ (Randbedingungen nicht erfüllt).
$x(t) = x_I(t) + a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ ist auch eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = f(t)$, wobei $x_1(t) = \sin(2t)$ und $x_2(t) = \cos(2t)$ die Lösungen der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = 0$ sind.
$x(0) = \frac{1}{2} \sin^2 T + a_2$ und $x'(0) = -\sin T \cos T + 2a_1$
Aus den Randbedingungen $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$, gilt $a_1 = \frac{1}{2} \sin T \cos T$ und $a_2 = -\frac{1}{2} \sin^2 T$
Wenn $0 < t < T$, $x(t) = \frac{1}{2} \sin^2(T-t) + \frac{1}{2} \sin T \cos T \sin(2t) - \frac{1}{2} \sin^2 T \cos(2t) = \frac{1}{2} \sin^2 t$
Wenn $t > T$, $x(t) = \frac{1}{2} \sin T \cos T \sin(2t) - \frac{1}{2} \sin^2 T \cos(2t) = \frac{1}{2} \sin T \sin(2t-T)$
altenative 2: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t') f(t') dt' = \int_0^T G(t,t') dt' = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\omega)} e^{i\omega t} e^{-i\omega t'} dt' = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\omega)} e^{i\omega t} e^{-i\omega t'} d\omega dt'$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\omega)} e^{i\omega t} \frac{e^{-i\omega T}-1}{-i\omega} d\omega = \frac{i}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega(t-T)} - e^{i\omega t}) \left(\frac{2}{\omega} - \frac{1}{\omega+2} - \frac{1}{\omega-2}\right) d\omega$
Mit einer Verschiebung der Pole wie (a) kann das Integral als den Grenzwert gerechnet werden:
$x(t) = -\frac{1}{8} H(t-T)(2 - e^{-2i\omega(t-T)} - e^{2i\omega(t-T)}) + \frac{1}{8} H(t)(2 - e^{-2i\omega t} - e^{2i\omega t}) = -\frac{1}{2} H(t-T) \sin^2(t-T) + \frac{1}{2} H(t) \sin^2 t$

d) Lösung mit $G_{-\varepsilon}(t,t')$, $x_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{-\varepsilon}(t,t')f(t')dt' = -\int_0^T \frac{1}{2}H(t'-t)\sin(2(t-t'))dt'$
Wenn $0 < t < T$, $x_I(t) = -\int_t^T \frac{1}{2}\sin(2(t-t'))dt' = \frac{1}{2}\sin^2(T-t)$
Wenn $t > T$, $x_I(t) = 0$
Für $x(t) = x_I(t)$ sind die Randbedingungen erfüllt.
zusätzliche Frage: Berechnen Sie die Lösung $x_I(t)$ mit $G_{+\varepsilon}(t,t')$ und mithilfe der Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der homogenen Gleichung finden Sie die Lösung, die die Randbedingungen erfüllt.
Anmerkung : Wenn die Randbedingungen, $x(t_0) = x_0$ und $x'(t_0) = v_0$, gegeben sind, stellt die Lösung mit der Greenschen Funktion $G(t,t') \propto H(t-t')$ die Zeitentwicklung in die Zukunft dar und mit $G(t,t') \propto H(t'-t)$ in die Vergangenheit.

9.2 Sturm-Liouville-Problem

Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0 \to p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$
$\to a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ mit $a_1/a_2 = p'(x)/p(x)$ und $a_0/a_2 = (q(x) + \lambda\rho(x))/p(x)$.
Anmerkung: Da $y(x)$ auch die Gleichung $b(x)(a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)) = 0$ erfüllt, gilt nicht immer die Koeffizientenvergleich wie $p(x) = a_2(x)$, $p'(x) = a_1(x)$, ...
a) (Chebyshev-Gleichung) $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \lambda y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = -x/(1-x^2) = (1/2)(1/(1+x) - 1/(1-x))$, $q(x)/p(x) = 0$ und $\lambda\rho(x)/p(x) = \lambda/(1-x^2)$
$\to \log(p(x)) = (1/2)\log(x+1) + (1/2)\log(1-x) \to p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = 0$ und $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
$\to \left(\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\right] + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\right)y(x) = 0$
b) (Laguerresche Differentialgleichung) $xy''(x) + (a+1-x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = (a+1-x)/x = (a+1)/x - 1$, $q(x)/p(x) = 0$ und $\lambda\rho(x)/p(x) = \lambda/x$
$\to \log(p(x)) = (a+1)\log(x) - x \to p(x) = x^{a+1}e^{-x}$, $q(x) = 0$ und $\rho(x) = x^a e^{-x}$.
$\to \left(\frac{d}{dx}\left[x^{a+1}e^{-x}\frac{d}{dx}\right] + \lambda x^a e^{-x}\right)y(x) = 0$

9.3 Separationsansatz und Sturm-Liouville-Problem

a)Separationsansatz : $\psi(r,\phi) = P(r)Q(\phi)$
$(\nabla^2 + \alpha)\psi(r,\phi) = 0$
$P''(r)Q(\phi) + \frac{1}{r}P'(r)Q(\phi) + \frac{1}{r^2}P(r)Q''(\phi) + \alpha P(r)Q(\phi) = 0$
$\frac{P''(r)}{P(r)} + \frac{1}{r}\frac{P'(r)}{P(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)} + \alpha = 0$
$r^2\frac{P''(r)}{P(r)} + r\frac{P'(r)}{P(r)} + \frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)} + \alpha r^2 = 0$
$r^2\frac{P''(r)}{P(r)} + r\frac{P'(r)}{P(r)} + \alpha r^2 = -\frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)}$
linke Seite: Funktion von r (und unabhängig von ϕ), rechte Seite: Funktion von ϕ (und unabhängig von r)
$\to$ Die Gleichung gilt für beliebige r, ϕ nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von r, ϕ).
$r^2\frac{P''(r)}{P(r)} + r\frac{P'(r)}{P(r)} + \alpha r^2 = -\frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)} = Z$
$r^2\frac{P''(r)}{P(r)} + r\frac{P'(r)}{P(r)} + \alpha r^2 = Z$ und $-\frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)} = Z$
b) Differentialgleichung in r: $r^2\frac{P''(r)}{P(r)} + r\frac{P'(r)}{P(r)} + \alpha r^2 = Z$
Eigenwertgleichung: $P''(r) + \frac{1}{r}P'(r) - \frac{Z}{r^2}P(r) = -\alpha P(r)$ ($\mathcal{L}_r = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{Z}{r^2}$ und $\lambda = -\alpha$)
Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dr}\left[p(r)\frac{d}{dr}\right] + q(r) + \alpha\rho(r)\right)P_\alpha(r) = 0 \to p(r)P_\alpha''(r) + p'(r)P_\alpha'(r) + q(r)P_\alpha(r) + \alpha\rho(r)P_\alpha(r) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(r)/p(r) = 1/r \to \log p(r) = \log r \to p(r) = r$
$q(r) = -Z/r^2 p(r) = -Z/r$ und $\rho(r) = p(r) = r$
$\left(\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\right] - \frac{Z}{r} + \alpha r\right)P_\alpha(r) = 0$
c) Eigenwertgleichung: $\mathcal{L}_r P_n(r) = -\alpha_n P_n(r)$
$\mathcal{L}_r f(r) = \mathcal{L}_r \sum_{n=1}^{\infty} f_n P_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\mathcal{L}_r P_n(r)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n P_n(r)$
anderseits
$\int_0^1 dr' L(r,r')f(r')\rho(r') = \int_0^1 dr'\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n P_n(r)P_n^*(r')\right)\sum_{m=1}^{\infty} f_m P_m(r')\rho(r')$
$= -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n f_m P_n(r)\int_0^1 dr' P_n^*(r')P_m(r')\rho(r') = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_n f_m P_n(r)\delta_{n,m} = -\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n P_n(r) = \mathcal{L}_r f(r)$
Anmerkung: Die Greensche Funktion $G(r,r') = -\sum_{n=1}^{\infty}(1/\alpha_n)P_n(r)P_n^*(r')$ ist eine Lösung der Gleichung $\mathcal{L}_r G(r,r') = \delta(r-r')$.