EDyn I — Tutorien Fr., 27. 3. 2009

1. Betrachten Sie zwei Kugelflächen mit den Radien R_0 und r_0, deren Zentren um einen Vektor $\vec{a}$ gegeneinander verschoben sind, wobei $|\vec{a}|+r_0 < R_0$ sei. Der Volumsbereich zwischen den beiden Kugelflächen sei homogen geladen (Raumladungsdichte ρ_0). Berechnen Sie unter Verwendung des Superpositionsprinzips das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ und das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in dem von der inneren Kugelfläche eingeschlossenen ladungsfreien Hohlraum. (Hinweis: Verwenden Sie das Superpositionsprinzip, indem Sie das Potential einer homogen geladenen Kugel vom Radius R_0 mit dem Potential einer entgegengesetzt homogen geladenen Kugel vom Radius r_0 überlagern.)

2. Es sei $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}$ das elektrostatische Feld einer positiven Punktladung Q im Ursprung.
   a) Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla}\vec{E} = Q\delta^{(3)}(\vec{r})/\epsilon_0$ gilt.
   Für den Fall $\vec{r} = 0$ wenden Sie den Gaußschen Satz unter Verwendung einer beliebigen Testfunktion an.
   b) Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ gilt.
   Für den Fall $\vec{r} = 0$ benützen Sie folgende Definition der Rotation:
   $$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{A}$$
   Zeigen Sie, dass diese Definition für (glatte) Vektorfelder mit der üblichen Definition übereinstimmt, indem Sie einen beliebig kleinen Würfel betrachten.

3. a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ eines homogen geladenen unendlich dünnen Stabes entlang der z-Achse mit der Länge $2L$ und der Gesamtladung Q (Endpunkte bei $z = \pm L$).
   b) Zeigen Sie, dass die Feldstärke im Grenzfall $L \to \infty$ (mit $\tau = \frac{Q}{2L}$ festgehalten) in die (in den vorigen Übungen berechnete) Feldstärke eines unendlich langen dünnen Stabes mit der Ladung τ pro Längeneinheit übergeht, während das Potential bei diesem Grenzübergang divergiert.
   c) "Renormieren" Sie das Potential jetzt gemäß
   $$\Phi_{ren}(R, z) = \Phi(R, z) - \Phi(a, 0)$$
   mit beliebigem, festem a (entspricht für festes a dem Hinzufügen einer Konstanten), und zeigen Sie, dass im Grenzfall $L \to \infty$; ($\tau = \frac{Q}{2L}$ fest) das Potential des unendlich langen dünnen Stabes erhalten wird.