EDyn I — Tutorien Fr., 15.5.2009

1. Ein allseitig unendlich ausgedehnter Leiter hat einen unendlich langen zylindrischen Hohlraum (Zylinderachse = z-Achse) vom Radius a. Der Leiter befindet sich im Feld eines unendlich langen dünnen Stabes mit der Ladung τ pro Längeneinheit, welcher im Hohlraum parallel zur Zylinderachse verläuft und von dieser den Abstand $R_0 < a$ besitzt. Der Leiter sei auf dem Potential null.
   a) Schreiben Sie die Differentialgleichung und die Randbedingung für das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Hohlraum an. Zeigen Sie, dass das Problem mit Hilfe der Spiegelladungsmethode gelöst werden kann, indem Sie das Potential als Summe $\Phi(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) + c$ ansetzen, wobei $\Phi_1(\vec{r})$ dem Potential des gegebenen unendlich langen Stabes entspricht und c eine Konstante sein soll. Welche Gleichung muss nun $\Phi_2(\vec{r})$ im Hohlraum erfüllen und wie sehen die allgemeinen Lösungen dazu aus ? Passen Sie diese an die Randbedingungen an und zeigen Sie, dass $\Phi_2(\vec{r})$ ebenfalls als das Potential eines unendlich langen Stabes am Ort r_0 mit der Ladung τ_1 geschrieben weren kann. Bestimmen Sie so r_0 und τ_1.
   b) Berechnen Sie die auf der Zylinderoberfläche induzierte Flächenladungsdichte $\sigma(\varphi)$.

   Hinweis: $\Phi_1(R) = -2\tau \ln R$ mit $R^2 = x^2 + y^2$ kann als bekannt vorausgesetzt werden.

$$-2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p^m \cos m\varphi = \ln(1 + p^2 - 2p\cos\varphi); p^2 < 1$$

2. Gegeben sei eine Hohlkugel mit Radius a. Die Halbkugel $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ besitzt das elektrische Potential Φ_0, die Halbkugel $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ das elektrische Potential $-\Phi_0$. Berechnen Sie das Potential im Äußeren der Kugel und geben Sie die ersten Glieder bis zur Ordnung $(\frac{a}{r})^4$. an.

   Hinweis: Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen der Legendrepolynome und die Eigenschaften, die in den letzten Übungen hergeleitet wurden! Für welche l sind die $P_l(x)$ eine gerade bzw. ungerade Funktion von x?

3. Ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1 im Halbraum $x \geq 0$ stößt in der Ebene $x = 0$ an ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ε_2, welches den Halbraum $x \leq 0$ erfüllen soll. Gesucht

ist das elektische Feld $\vec{E}(\vec{r})$, wenn sich zusätzlich noch eine Punktladung q an der Stelle $x = x_0$ im Dielekrikum 1 befindet. Setzen Sie dazu für die Berechnung des elektrischen Feldes im Halbraum $x \geq 0$ zusätzlich zum Feld der Punktladung q das Feld einer Spiegelladung q_1 bei $x = -x_0$ an und für die Berechnung im Halbraum $x \leq 0$ das Feld einer Punktladung q_2 bei $x = x_0$. Bestimmen Sie q_1 und q_2 aus den Randbedingungen an der Grenzfläche der beiden Dielektrika.