Aufgabenblatt 1 **für 12.03.2010**

1.1 Tensorschreibweise

Wandle folgende Ausdrücke in äquivalente Ausdrücke in Vektorenschreibweise um. Dabei soll der Vektoroperator $\vec{\nabla}$ verwendet werden. Wo es möglich ist, sollen die Ausdrücke ebenfalls mit div, grad, rot, und Δ geschrieben werden.
a) $C_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k$
b) $l^2 = a_j a_k \delta_{jk}$
c) $\rho = \partial_m \delta_{km} E_i \delta_{ik}$
d) $C_m = \partial_s \varepsilon_{tsm} B_t$
e) $\rho = \delta_{km}\partial_i \delta_{mk} E_i$
f) $\varepsilon_{abc}\partial_b\partial_c\phi = ?$
g) $\varepsilon_{abc}\partial_l\varepsilon_{klm}\partial_b a_m \delta_{kc} = b_a$
h) $q = \partial_a\partial_b\varepsilon_{ace}\varepsilon_{bcd}\phi\delta_{ed}$

1.2 Vektorfelder

a) Zeichne folgende Vektorfelder in der x/y-Ebene an den Schnittpunkten von $x = 1, 2, 3$ und $y = 1, 2, 3$ (also 9 Vektoren)

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{y}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und berechne die Rotation und die Divergenz für beide Felder.
b) Schreibe das wirbelfreie Feld als Gradient eines Skalarfeldes $\phi(x, y, z)$. Ist ϕ eindeutig gegeben? Wie schaut die allgemeine Lösung aus?
c) Schreibe das divergenzfreie Feld als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}$. Suche eine Lösung $\vec{A}_1 = (0, 0, ?)$ bei der die x- und y-Komponenten verschwinden. Suche eine weitere Lösung $\vec{A}_2 = (?, ?, 0)$ bei der die z-Komponente verschwindet. Wie lautet die Rotation der Differenz der beiden Lösungen $\text{rot}(\vec{A}_1 - \vec{A}_2)$? Wie könnte man daher die allgemeine Lösung für $\vec{A}$ anschreiben?

1.3 Punktladung

Eine Punktladung mit Ladung q befindet sich an der Stelle $x = y = 0$, $z = a > 0$.
a) Schreibe die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$ mit Hilfe von δ-Funktionen an, und überprüfe

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = q.$$

b) Bestimme das Potential

$$\phi(\vec{r}) = k_1 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

in kartesischen Koordinaten.
c) Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\, \phi(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten.
d) Berechne Rotation und Divergenz des elektrischen Feldes. Erhält man aus der Divergenz wieder die ursprüngliche Ladungsverteilung? (Hinweis: In der Nähe der Punktladung soll der gaußsche Integralsatz angewendet werden.)
e) Gib das Potential $\phi = \phi(r, \theta, \varphi)$ in Kugelkoordinaten an (die üblichen Kugelkoordinaten um den Ursprung).
f) Berechne das davon abgeleitete elektrische Feld $\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta + E_\phi\vec{e}_\varphi$ unter Verwendung des Gradienten in Kugelkoordinaten. Überprüfe das Ergebnis mit dem Ausdruck für $\vec{E}(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten.
Hinweis: In Kugelkoordinaten ist der Gradient gegeben durch

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Ankreuzbar: 1abcd, 1efgh, 2abc, 3abcd, 3ef