**Aufgabenblatt 3** **für 26.03.2010**

## 3.1 Greensche Funktion der Klein-Gordon Gleichung

Die Klein-Gordon Gleichung ist eine relativistische Erweiterung der Schrödinger-Gleichung, die unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Sie ist gegeben durch

$$\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\vec{r},t) = 0, \qquad \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Die zugehörige Greensche Funktion soll folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) D(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = -4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t').$$

a) Bestimme die Greensche Funktion $D(\vec{k},\omega)$ im Impulsraum.
b) Berechne die Greensche Funktion in der „gemischten Darstellung“ $D(\vec{k},t-t')$, in der nur die $\omega$-Komponente über eine Fourier-Transformation zurücktransformiert wird:

$$D(\vec{k},t-t') = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega e^{-i\omega(t-t')} D(\vec{k},\omega).$$

Beachte dabei, dass $D(\vec{k},\omega)$ Pole auf dem Integrationsweg enthält. Gemäß der Vorlesung sollen die Pole daher in die komplexe Ebene verschoben werden, um die $\omega$-Integration mit Hilfe des Residuensatzes durchführen zu können. Bestimme die retardierte $D_{ret}$, avancierte $D_{av}$, kausale (Feynman) $D_c$, antikausale (Anti-Feynman) $D_{ac}$, und die Cauchysche Hauptwertlösung $D_p$ für die Greensche Funktion in der gemischten Darstellung.
Tipp: Zur Reduzierung der Schreibarbeit kann man $\epsilon_k^2 \equiv \vec{k}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$ setzen.

## 3.2 Impulsbilanz

Leite die in der Vorlesung angegebene Formel zur Impulsbilanz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}^{\mathrm{mech}} = \oint_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{r},t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}^{\mathrm{feld}}$$

ausgehend von der Lorentzkraftdichte unter Verwendung der Maxwellgleichungen Schritt für Schritt her. Hierbei soll die Indexschreibweise verwendet werden, und durch sorgfältige Klammersetzung klar sein, auf welche Terme eine Ableitung jeweils wirkt.

## 3.3 Fock-Schwinger Eichung

Eine in der Quantenfeldtheorie vorkommende (auch dort nur Eingeweihten bekannte) Eichbedingung ist die "zentrale" oder "Fock-Schwinger"-Eichung,

$$x_\mu A^\mu := ct\phi - \vec{x}\vec{A} = 0.$$

Sie zeichnet sich dadurch aus, dass die Eichpotentiale durch relativ einfache Umkehrformeln aus den Feldstärken bestimmt werden können:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x},t) &= -\int_0^1 d\alpha\,\alpha\,\vec{x}\cdot\vec{E}(\alpha\vec{x},\alpha t),\\
\vec{A}(\vec{x},t) &= -\int_0^1 d\alpha\,\alpha\left[\vec{E}(\alpha\vec{x},\alpha t)ct + \vec{x}\times\vec{B}(\alpha\vec{x},\alpha t)\right].
\end{aligned}$$

a) Berechne mit diesen Formeln die Eichpotentiale $\phi(\vec{x},t)$ und $\vec{A}(\vec{x},t)$ zu den Feldern

$$\vec{E} = \gamma(\lambda r^2 - 3r)e^{-\lambda r}\vec{e}_r, \quad \vec{B} = \beta(e^{-z\lambda}, 0, e^{-x\lambda}),$$

wobei $\gamma, \beta, \lambda$ Konstante sind und überprüfe durch Einsetzen dieser Lösungen in

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A},$$

dass diese Eichpotentiale tatsächlich auf die angegebenen Felder führen.
b) Verifiziere obige Formeln für die Eichpotentiale in ihrer Allgemeinheit durch Berechnung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus diesen, unter der Voraussetzung, dass diese die homogenen Maxwellgleichungen erfüllen. [Hinweis: Für die Berechnung von $\vec{E}$ sollen zunächst Terme der Form $\partial_t\vec{B}$ mit Hilfe der homogenen Maxwellgleichungen in Ausdrücke, die nur $\vec{E}$ enthalten, umgeschrieben werden. Der Integrand kann dann als totale Ableitung bezüglich $\alpha$ geschrieben werden. Für die Berechnung von $\vec{B}$ sind ebenfalls die homogenen Maxwellgleichungen anzuwenden.]

---

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2, 3a, 3b