Lösungen zu Blatt 1 **12.03.2010**

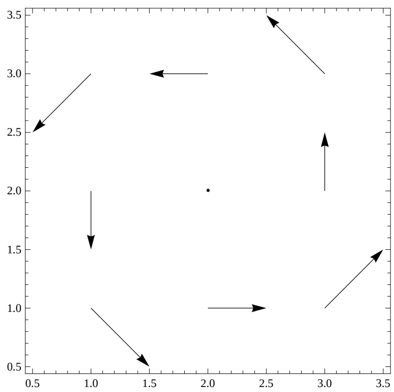
1.1 Tensorschreibweise

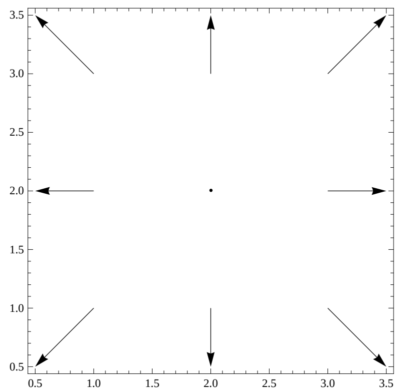
a) $C_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k \quad \rightarrow \quad \vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$, $\vec{C} = \mathrm{rot}\vec{B}$.
b) $l^2 = a_j a_k \delta_{jk} \quad \rightarrow \quad l^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
c) $\rho = \partial_m \delta_{km} E_i \delta_{ik} \quad \rightarrow \quad \rho = \vec{\nabla}\vec{E}$, $\rho = \mathrm{div}\vec{E}$. ($\delta_{km}\delta_{ik} = \delta_{im}$, δ vertauscht mit ∂)
d) $C_m = \partial_s \varepsilon_{tsm} B_t \quad \rightarrow \quad \vec{C} = -\vec{\nabla} \times \vec{B}$, $\vec{C} = -\mathrm{rot}\vec{B}$. (Vorzeichen! $\varepsilon_{tsm} = -\varepsilon_{mst}$; ε vertauscht mit ∂)
e) $\rho = \delta_{km}\partial_i \delta_{mk} E_i \quad \rightarrow \quad \rho = 3\vec{\nabla}\vec{E}$, $\rho = 3\mathrm{div}\vec{E}$. ($\delta_{ii} = 3$)
f) $\varepsilon_{abc}\partial_b \partial_c \phi = ? \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\phi = 0$.
g) $\varepsilon_{abc}\partial_l \varepsilon_{klm}\partial_b a_m \delta_{kc} = b_a \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{b}$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{a} = \vec{b}$.
Ebenfalls möglich: $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{a}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{a} - \Delta\vec{a} = \vec{b}$.
h) $q = \partial_a \partial_b \varepsilon_{ace}\varepsilon_{bcd}\phi\delta_{ed} \quad \rightarrow \quad q = 2\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi$, $q = 2\Delta\phi$. ($\varepsilon_{acd}\varepsilon_{bcd} = 2\delta_{ab}$)

1.2 Vektorfelder

a) Zeichne folgende Vektorfelder in der x/y-Ebene

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{y}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$





und berechne die Rotation und die Divergenz für beide Felder.

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 1.$$

b) Schreibe das wirbelfreie Feld ($\vec{E}$) als Gradient eines Skalarfeldes $\phi(x, y, z)$.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{y}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-)\mathrm{grad}\,\phi = (-)\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\phi \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi \\ \frac{\partial}{\partial z}\phi \end{pmatrix}$$

Ist ϕ eindeutig gegeben? Nein. Wie schaut die allgemeine Lösung aus?
$\vec{E} = (-)\mathrm{grad}\phi$ mit $(-)\phi = \frac{x^2}{4} - x + \frac{y^2}{4} - y + c$ mit beliebiger (Integrations-)Konstante c.

c) Schreibe das divergenzfreie Feld ($\vec{B}$) als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}$.

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \\ \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \end{pmatrix}$$

Suche eine Lösung $\vec{A}_1 = (0, 0, ?)$ bei der die x- und y-Komponenten verschwinden.

$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} + x \end{pmatrix}$

Suche eine weitere Lösung $\vec{A}_2 = (?, ?, 0)$ bei der die z-Komponente verschwindet.

$\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} z\left(\frac{x}{2} - 1\right) \\ -z\left(1 - \frac{y}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$

Wie lautet die Rotation der Differenz der beiden Lösungen $\operatorname{rot}(\vec{A}_1 - \vec{A}_2)$?
$\operatorname{rot}(\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = \operatorname{rot}\vec{A}_1 - \operatorname{rot}\vec{A}_2 = \vec{B} - \vec{B} = 0$.
Wie könnte man daher die allgemeine Lösung für $\vec{A}$ anschreiben?
Alle Lösungen unterscheiden sich durch ein wirbelfreies Feld voneinander. Das wirbelfreie Feld kann man als Gradient eines Skalarfeldes schreiben. Daher kann man die allgemeine Lösung angeben als $\vec{A} = \vec{A}_1 + \operatorname{grad}\phi_1$ oder $\vec{A} = \vec{A}_2 + \operatorname{grad}\phi_2$ für allgemeine Funktionen $\phi_{1,2} = \phi_{1,2}(x, y, z)$.

1.3 Punktladung

Eine Punktladung mit Ladung q befindet sich an der Stelle $x = y = 0$, $z = a > 0$.
a) Schreibe die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$ mit Hilfe von δ-Funktionen an

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a).$$

Überprüfe

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = q \int \delta(x) dx \int \delta(y) dy \int \delta(z - a) dz = q.$$

b) Bestimme das Potential $\phi(\vec{r}) = k_1 \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ in kartesischen Koordinaten.

$$\phi(\vec{r}) = k_q \int dx' dy' dz' \frac{q\delta(x')\delta(y')\delta(z' - a)}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = k_1 \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}$$

.
c) Bestimme das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_1 q \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} = \frac{k_1 q}{\left(x^2 + y^2 + (z - a)^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - a \end{pmatrix}.$$

d) Berechne Rotation und Divergenz des elektrischen Feldes. Erhält man aus der Divergenz wieder die ursprüngliche Ladungsverteilung? (Hinweis: In der Nähe der Punktladung soll der gaußsche Integralsatz angewendet werden.)
Für $(x, y, z) \neq (0, 0, a)$ gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = k_1 q \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \frac{2y(z-a)}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{5/2}} - \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2y(z-a)}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{5/2}} \\ \text{analog} \\ \text{analog} \end{pmatrix} = 0$$

oder schneller: $\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$.

$$\operatorname{div} \vec{E} = k_q q \left(\frac{1}{\left(x^2 + y^2 + (z - a)^2\right)^{3/2}} + x \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2x}{\left(x^2 + y^2 + (z - a)^2\right)^{5/2}} + \ldots \right) = 0$$

.
Um die Ladung herum verwendet man den gaußschen Integralsatz:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} d^3r = \int_{\partial V} \vec{E} d^2\vec{f}.$$

Mit $d^2\vec{f} = \vec{n} dA = \vec{n}\tilde{r}^2 d\Omega$ um die Ladung herum (also $\tilde{r}^2 = x^2 + y^2 + (z-a)^2$) und

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} d^3r = \int_{S=\partial V} \vec{E} d^2\vec{f} = k_1 q \int_S \frac{x^2+y^2+(z-a)^2}{\left(x^2+y^2+(z-a)^2\right)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \tilde{r}^2 d\Omega = k_1 q \int_S d\Omega = 4\pi k_1 q.$$

Für die Rotation erhält man

$$\int_V \operatorname{rot} \vec{E} d^3r = \int_{S=\partial V} d^2\vec{f} \times \vec{E} = \int_S \vec{n} \times \vec{E} \tilde{r}^2 d\Omega.$$

Hier gilt wegen $\vec{n} \times \vec{E} = 0$, dass für jede umschließende Hülle 0 als Ergebnis herauskommt.
e) Gib das Potential $\phi = \phi(r, \theta, \phi)$ in Kugelkoordinaten an (die üblichen Kugelkoordinaten um den Ursprung).
Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

$$\phi(r, \theta, \varphi) = k_1 \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}}$$

f) Berechne das davon abgeleitete elektrische Feld $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_\varphi \vec{e}_\varphi$ unter Verwendung des Gradienten in Kugelkoordinaten.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -k_1 q \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} \\ &= k_1 q \left(\vec{e}_r \frac{r - a\cos\theta}{\left(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta\right)^{3/2}} + \vec{e}_\theta \frac{a \sin\theta}{\left(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta\right)^{3/2}} + \vec{e}_\varphi 0 \right) \end{aligned}$$

Überprüfe das Ergebnis mit dem Ausdruck für $\vec{E}(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten.
Durch Einsetzen von

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man wieder $\vec{E}$:

$$(r - a\cos\theta) \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} + a\sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}$$