Lösungen zu Blatt 2 **19.03.2010**

2.1 Zylinder mit exzentrischer Längsbohrung

a) Gegeben sei ein unendlich langer Zylinder mit Radius R_0 mit homogener Raumladungsdichte ρ_0. Berechne das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ und das davon abgeleitete elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Inneren und Äußeren des Zylinders durch Lösen der Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$.
Laplace Operator und Gradient in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \qquad \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z,$$

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & r \le R_0 \\ 0 & r > R_0. \end{cases}$$

Durchführung der ersten Integration von $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -4\pi\rho(\vec{r})$:

$$r\frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases} -2\pi\rho_0 r^2 + C_1 & r \le R_0 \\ C_2 & r > R_0 \end{cases}$$

mit $-2\pi\rho_0 R^2 + C_1 = C_2$ (Stetigkeitsbedingung bei $r = R$). Die zweite Integration ergibt

$$\phi = \begin{cases} -\pi\rho_0 r^2 + C_1 \ln r + C_3 & r \le R_0 \\ C_2 \ln r + C_4 & r > R_0 \end{cases}$$

mit $-\pi\rho_0 R^2 + C_1 \ln R + C_3 = C_2 \ln R + C_4$. Davon abgeleitet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\vec{e}_r\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial r} = \vec{e}_r \begin{cases} +2\pi\rho_0 r - \frac{C_1}{r} & r \le R_0 \\ -\frac{C_2}{r} & r > R_0. \end{cases}$$

Um $\vec{E}(0,0,z) = 0$ zu erhalten (was aus Symmetriegründen folgt), muss $C_1 = 0$ sein (d.h. $\phi(0,0,z)$ ist endlich entlang der Zylinderachse). Daraus folgt $C_2 = -2\pi\rho_0 R^2$. C_3 ist beliebig und C_4 folgt aus der zweiten Stetigkeitsbedingung, also

$$\phi = \begin{cases} -\pi\rho_0 r^2 + C_3 & r \le R_0 \\ -2\pi\rho_0 R^2 \ln\frac{r}{R} - \pi\rho_0 R^2 + C_3 & r > R_0 \end{cases} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_r \begin{cases} 2\pi\rho_0 r & r \le R_0 \\ 2\pi\rho_0\frac{R^2}{r} & r > R_0. \end{cases}$$

b) In diesen unendlich langen Zylinder wird nun ein unendlich langes achsenparalleles aber exzentrisches Loch mit Radius r_0 gebohrt. Der Abstand der Achse des Zylinders zur Achse der Bohrung sei a, wobei $a + r_0 < R_0$ gelte. Berechne für den (ladungsfreien) Innenraum der Bohrung das elektrostatische Potential und das elektrostatische Feld.
Anwendung des Superpositionsprinzips, z.B. Verlegung des Lochs in $\vec{e}_x$-Richtung:

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y,z) &= -\pi\rho_0\left(x^2+y^2\right), \\ \phi_2(x,y,z) &= +\pi\rho_0\left((x-a)^2+y^2\right). \end{aligned}$$

Addieren: $\phi(x,y,z) = \phi_1(x,y,z) + \phi_2(x,y,z) = \pi\rho_0\left(a^2 - 2ax\right)$. Berechnung von $\vec{\nabla}$ in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2a\pi\rho_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a\pi\rho_0\vec{e}_x = 2\vec{a}\pi\rho_0.$$

2.2 Definition des Ampere

a) Leite die in der Vorlesung angegebene Formel zur Berechnung der Kraft zwischen zwei unendlich langen parallelen geradlinigen vernachlässigbar dünnen Drähten, die für die Definition des Ampere verwendet wird, her:

$$\frac{F}{l} = k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d} \qquad \text{Hinweis}: \int \left(s^2 + t^2\right)^{-3/2} \mathrm{d}t = \frac{t}{s^2\sqrt{s^2+t^2}}.$$

Ausgehend von Biot-Savart

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = k_3 \int_{\mathcal{L}_1} \frac{I_1 \mathrm{d}\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

und dem 1. Ampèreschen Gesetz angewendet auf eine Leiterschleife

$$\vec{F}_2 = k_4 \int_{\mathcal{L}_2} \left[I_2 \mathrm{d}\vec{r}\,' \times \vec{B}_1(\vec{r})\right]$$

wird zunächst $\vec{B}_1$ berechnet. $\mathcal{L}_1$ wird in the z-Achse gelegt, und durch $\vec{r}\,' = (0, 0, z')$ parametrisiert, und $\mathcal{L}_2$ im Abstand d an der Position $x = d$, $y = 0$ parallel dazu gelegt. $\vec{B}_1(d, 0, z)$ ist gegeben durch (Integral siehe Hinweis)

$$\vec{B}_1(d,0,0) = k_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_1}{\left(d^2+z^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = k_3 I_1 d \vec{e}_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(d^2+z^2\right)^{3/2}} = k_3 I_1 d \vec{e}_y \frac{2}{d^2} = \frac{2k_3 I_1}{d} \vec{e}_y.$$

Aus Symmetriegründen ist $\vec{B}_1(d, 0, z) = \vec{B}_1(d, 0, 0)$ für alle z. Das in $\vec{F}_2$ eingesetzt ergibt

$$\vec{F}_2 = k_4 I_2 \frac{2k_3 I_1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = -\vec{e}_x k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d} \int_{-\infty}^{\infty} dz.$$

In der Form würde das divergieren, aber man kann die Integrationsgrenzen anders wählen - z.B. nur die Kraft von 0 bis l ausrechnen:

$$\vec{F}_2 = -\vec{e}_x k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d} \int_0^l dz = -\vec{e}_x k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d} l.$$

Nimmt man den Betrag dieser Relation, bzw. bezeichnet man mit F die in Richtung des anderen Leiters wirkende Kraft, also $\vec{F}_2 = -F\vec{e}_x$, so erhält man die Lösung

$$\frac{F}{l} = k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d}.$$

b) Aufgrund der offensichtlichen praktischen Probleme bei der Umsetzung dieser Experimentalanordnung wird angedacht, die Definition des Ampere im SI System, die es seit 1948 gibt, durch eine alternative Definition zu ersetzen, was bereits 2011 auf der 24. Generalkonferenz für Maß und Gewicht geschehen könnte. Die neue vorgeschlagene Definition würde lauten:

> The ampere is the electric current in the direction of the flow of exactly $1/(1.602\ 176\ 53 \times 10^{-19})$ elementary charges per second.

Wenn gleichzeitig auch die Definition des Kilogramms (im Moment noch über das „Urkilogramm" definiert) geändert würde, um das plancksche Wirkungsquantum h ebenfalls exakt festzulegen, würde sich dadurch die magnetische Feldkonstante μ_0 gegenüber dem derzeit definierten Wert ändern?
Zunächst wird festgestellt, dass durch die Neudefinition des Ampere die Elementarladung auf exakt $1.60217653 \times 10^{-19}$ C festgelegt wird, da 1 C = 1 As weiterhin gilt (bisher war die Elementarladung eine Messgröße).

In der Formel, die in der Ampere-Definition verwendet wird,

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{d},$$

gibt es im Wesentlichen drei Größen: die Kraft pro Länge F/l, die magnetische Feldkonstante μ_0 und den Strom durch Abstand $2I^2/d$. Derzeit wird μ_0 willkürlich auf $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ festgelegt. Durch Einsetzen von 1 A (unabhängig davon, was jetzt „1 A" bedeutet) erhält man für F/l den Wert $2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N/m}$. Dieser ist aber eine physikalisch messbare Größe, die nur dann erreicht wird, wenn ein ganz bestimmter Strom durch den Leiter fließt (und derzeit somit 1 A definiert). Wenn 1 A gemäß der neuen Definition umdefiniert wird, würde ein (geringfügig) anderer Strom durch die Leitungen fließen, und die Kraft würde sich (geringfügig) ändern. Da 1 N = 1 kg m/s^2, wäre eine Möglichkeit, μ_0 weiterhin zu fixieren, und über obige Relation das Kilogramm neu zu definieren. Wenn man aber das Kilogramm definiert (egal ob über das Urkilogramm oder über eine exakte Definition von h), dann muss sich der Wert von μ_0 (geringfügig) ändern, damit die Relation weiterhin gilt (exakte Definitionen von Lichtgeschwindigkeit und Sekunde vorausgesetzt).
Mit der Neudefinition des Kilogramms kann man aber auch wie folgt argumentieren: Da die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/(2c_0\varepsilon_0 h) \approx 1/137$ eine dimensionslose physikalische Konstante ist, die nur experimentell bestimmt werden kann, können nicht alle 4 dimensionsbehafteten Größen der Gleichung (e, c_0, ε_0, h) gleichzeitig definiert werden - zumindest eine (wenn nicht mehrere) müssen abgeleitet sein. Da schon derzeit c_0 exakt definiert ist, und in der neuen Definition e und h auch exakt definiert werden würden, kann ε_0 nicht auch noch exakt definiert werden und ist daher abgeleitet. Wegen $c_0^2 = 1/(\varepsilon_0\mu_0)$ muss daher auch μ_0 eine abgeleitete Größe sein, und kann nicht mehr exakt auf $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ festgelegt werden. Mit den neuen Definitionen würde sich μ_0 in der Größenordnung von 1:10^9 ändern.

2.3 Kraft- und Bewegungsgleichungen

a) Gegeben sei ein Elektron mit Masse m_e und Ladung $q = -e$ mit anfänglicher Stromverteilung $\vec{j}_e(\vec{r},0) = -e\vec{v}_e(0)\delta^3(\vec{r})$, wobei $\vec{v}_e(0) = (0, v_{e,y}, v_{e,z})$ mit $v_{e,y} > 0$, das sich in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},t) = B\vec{e}_z$ mit $B > 0$ und konstantem elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r},t) = E\vec{e}_z$ befindet. Berechne ausgehend von der zeitabhängigen Ladungs- und Stromverteilung die entsprechende Lorentzkraftdichte $\vec{f}(\vec{r},t)$ und die dazugehörigen Bewegungsgleichungen im nicht-relativistischen Fall.
Zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilung:

$$\rho(\vec{r},t) = -e\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_e(t)), \qquad \vec{j}(\vec{r},t) = -e\vec{v}_e(t)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_e(t)).$$

Lorentzkraftdichte (Hier für das Gaußsche System. Im SI System fehlt der Faktor $1/c$):

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{r},t) &= \rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\vec{j}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t) = -e\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_e(t))\left(E\vec{e}_z + \frac{1}{c}\vec{v}_e(t)\times B\vec{e}_z\right)\\ &= -e\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_e(t))\begin{pmatrix} v_{e,y}(t)B/c \\ -v_{e,x}(t)B/c \\ E\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$m_e\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}_e(t) = \vec{F}(\vec{r}_e,t) = \int_V \mathrm{d}^3r'\,\vec{f}(\vec{r}\,',t) = -e\begin{pmatrix} v_{e,y}(t)B/c \\ -v_{e,x}(t)B/c \\ E\end{pmatrix}.$$

Mit $\ddot{x} = \mathrm{d}\dot{x}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ läßt sich schreiben

$$m_e\begin{pmatrix}\ddot{x}_e(t)\\ \ddot{y}_e(t)\\ \ddot{z}_e(t)\end{pmatrix} = -e\begin{pmatrix}\dot{y}_e(t)B/c \\ -\dot{x}_e(t)B/c \\ E\end{pmatrix}.$$

b) Löse die Bewegungsgleichungen. Hierzu kann ein Ansatz der Art $\vec{r}_e(t) = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2 + r\vec{e}_x\cos\omega t + r\vec{e}_y\sin\omega t$ verwendet werden. Bestimme $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, r, und ω, sodass die Bewegungsgleichungen für alle Zeiten t, und insbesondere die Anfangsbedingungen für $t = 0$ erfüllt sind.

Einsetzen gibt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_e\left(2c_x - r\omega^2\cos\omega t\right) &= -\frac{eB}{c}\left(b_y + 2c_y t + r\omega\cos\omega t\right), \\ m_e\left(2c_y - r\omega^2\sin\omega t\right) &= +\frac{eB}{c}\left(b_x + 2c_x t - r\omega\sin\omega t\right), \\ m_e 2c_z &= -eE. \end{aligned}$$

Da dies für alle t gelten muss, folgt sofort

$$c_z = -\frac{eE}{2m_e}, \qquad c_x = c_y = 0, \qquad b_y = b_x = 0, \qquad \omega = \frac{eB}{m_e c}.$$

Nun werden die Anfangsbedingungen eingesetzt:

$$\vec{r}_e(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + r \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_e(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{e,y} \\ v_{e,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Das führt auf

$$a_x = -r, \qquad a_y = a_z = 0, \qquad b_z = v_{e,z}, \qquad r = \frac{v_{e,y}}{\omega}.$$

Lösung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{e,z} \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{eE}{2m_e} \end{pmatrix}, \qquad r = \frac{v_{e,y} m_e c}{eB}, \qquad \omega = \frac{eB}{m_e c}.$$

c) Zur selben Zeit $t = 0$ startet auch ein Proton mit Masse m_p und Ladung $q = +e$ vom selben Ort. Mit welcher Geschwindigkeit $\vec{v}_p(0) = (0, v_{p,y}, v_{p,z})$ mit $v_{p,y} < 0$ muss dieses starten, um später mit dem Elektron zu kollidieren? Nach welcher Zeit t kollidieren diese? (Die Wechselwirkung zwischen Elektron und Proton sowie elektromagnetische Abstrahlungen sind in dieser Aufgabe zu vernachlässigen). Ist diese Lösung eindeutig?

Die Bewegungsgleichungen für Elektron und Proton lauten:

$$\vec{r}_e(t) = \begin{pmatrix} r_e\left(\cos\omega_e t - 1\right) \\ r_e \sin\omega_e t \\ v_{e,z} t - \frac{eE}{2m_e} t^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} r_p\left(\cos\omega_p t - 1\right) \\ r_p \sin\omega_p t \\ v_{p,z} t + \frac{eE}{2m_p} t^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{mit}\, r_e = \frac{v_{e,y} m_e}{+eB}, \qquad r_p = \frac{v_{p,y} m_p}{-eB}, \qquad \omega_e = \frac{+eB}{m_e c}, \qquad \omega_p = \frac{-eB}{m_p c}.$$

Auf die x/y-Ebene projiziert sind alle Bahnen Kreisbahnen mit Tangente im Ursprung entlang der y-Achse. Damit sich zwei solcher Bahnen schneiden, müssen entweder die Bahnen den gleichen Radius besitzen, oder sich die Teilchen im Ursprung wieder treffen.

Erste Lösung: Bahnen haben den gleichen Radius, $r_e = r_p$

$$r_e = \frac{v_{e,y} m_e}{+eB} = r_p = \frac{v_{p,y} m_p}{-eB} \qquad \to v_{p,y} = -\frac{v_{e,y} m_e}{m_p}.$$

Die Teilchen kollidieren, wenn die Umlaufwege sich zum ganzen Kreis oder Vielfachen eines Kreises addieren (Betrag wird genommen, da die Teilchen entgegengesetzt fliegen):

$$|\omega_e| t + |\omega_p| t = 2\pi n \qquad \to t = \frac{2\pi n}{|\omega_e| + |\omega_p|} = \frac{2\pi n c}{eB} \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}.$$

mit $n \in \mathbb{N}$ (für $n > 1$ gibt es noch die Unterscheidung über die z-Komponente, damit sich die Teilchen nicht schon vorher treffen). Zum Zeitpunkt der Kollision muss auch die z-Komponente übereinstimmen:

$$r_{e,z}(t) = r_{p,z}(t) \qquad \to v_{e,z} t - \frac{eE}{2m_e} t^2 = v_{p,z} t + \frac{eE}{2m_p} t^2 \qquad \to v_{p,z} = v_{e,z} - \frac{eEt}{2}\left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e}\right)$$

$$\rightarrow v_{p,z} = v_{e,z} - \frac{eE}{2}\frac{2\pi nc}{eB}\frac{m_e m_p}{m_e + m_p}\left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e}\right) = v_{e,z} - \frac{\pi ncE}{B}.$$

Alternative Lösungsmöglichkeit: Teilchen laufen auf verschieden großen Kreisbahnen, treffen sich aber im Ursprung wieder: Dann müssen die Umlaufzeiten $T_e = 2\pi/\omega_e$ und $T_p = 2\pi/\omega_p$ entweder gleich sein, $T_e = T_p$, oder ein gemeinsames Vielfaches besitzen, mit $m, n \in \mathbb{N}$:

$$nT_e = mT_p, \qquad \rightarrow \qquad \frac{\omega_e}{\omega_p} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}.$$

Die Zeit bis zur Kollision wäre $t = nT_e = mT_p$ für n, m teilerfremd, und $v_{p,z}$ ließe sich damit analog wie oben berechnen. Im Allgemeinen ist aber das Verhältnis m_p/m_e keine rationale Zahl, d.h. die Teilchen werden sich auf diese Weise nicht mehr treffen (punktförmige Teilchen vorausgesetzt). -> Es scheint doch nur die Lösung mit gleichen Radii zu geben.

d) Im Large Hadron Collider (LHC) werden Protonen demnächst auf Energien von 3,5 TeV beschleunigt. Welche magnetische Feldstärke (in Gauss und Tesla) wäre in einer naiven nicht-relativistischen Abschätzung notwendig, um das mit nahezu Lichtgeschwindigkeit fliegende Teilchen auf einer Bahn mit 27 km Umfang zu halten? (Für diese Abschätzung kann in der Kreisfrequenz $\omega = qB/m$ die Masse einfach durch $m \rightarrow E/c^2$ ersetzt werden).

Im SI System gilt $\omega = qB/m$. Kreisfrequenz $\omega = v/r = 2\pi c_0/(27\,\text{km})$, Energie: $E = 3.5\,\text{TeV} = 3.5 \times 10^{12} \times 1.602 \times 10^{-19}\text{J}$

$$B = \frac{\omega m_p}{e} = \frac{\omega E}{c^2 e} = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8\,\text{ms}^{-1}}{27000\,\text{m}} \frac{3.5 \times 10^{12} \times 1.602 \times 10^{-19}\,\text{J}}{(3 \times 10^8\,\text{ms}^{-1})^2 \times 1.602 \times 10^{-19}\,\text{As}} = 2.7\,\text{T}.$$

Im Gaußschen System gilt $\omega = qB/(cm)$. Umrechnung SI nach Gauss für $B^{[\text{SI}]} = 1\text{T}$:

$$B^{[\text{Gauss}]} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B^{[\text{SI}]} = \sqrt{\frac{1}{10^{-7}\text{N/A}^2}} 1\text{T} = \sqrt{\frac{\text{A}^2\text{s}^2}{10^{-7} \times 10^3\text{g} \times 10^2\text{cm}}} \times \frac{10^3\text{g}}{\text{s}^2\text{A}} = 10^4\text{g}^{1/2}\text{cm}^{-1/2}\text{s}^{-1} = 10^4\text{G}.$$

Umrechnungsfaktor 1 T = 10^4 G führt zu $B = 27000$ G.

Anmerkung: Der Wert 2.7 T liegt ganz gut im Bereich der tatsächlich im LHC verwendeten magnetischen Feldstärke von 0.5 T (injection) bis 8.3 T (collision).

e) Die Protonen werden in 2808 „bunches“ zu je $1{,}15 \times 10^{11}$ Teilchen in der Röhre gehalten. Wieviele Protonen fliegen in der Sekunde an einem bestimmten Ort vorbei? Welchem elektrischen Strom (in statampere und Ampere) entspricht das? Würde bei entsprechendem Strom zuhause die Sicherung durchbrennen?

Ein einzelnes Proton fliegt $c/(2\pi r) = 3 \times 10^8\,\text{ms}^{-1}/27\,\text{km} \approx 11000$ Mal in der Sekunde vorbei. Die Gesamtzahl der vorbeifliegenden Protonen beträgt:

$$\frac{n_p}{t} = 11000 \times 2808 \times 1.15 \times 10^{11} = 3.6 \times 10^{18}\text{s}^{-1}.$$

Die vorbeifliegende Gesamtladung pro Sekunde (und somit der Strom) beträgt dann

$$\frac{Q}{t} = \frac{n_p}{t} e = I = \frac{3 \times 10^8\,\text{ms}^{-1}}{27000\,\text{m}} \times 2808 \times 1.15 \times 10^{11} \times 1.602 \times 10^{-19}\,\text{As} = 0.6\,\text{A}.$$

Umrechnung SI nach Gauss für $I^{[\text{SI}]} = 1\text{A}$:

$$\begin{aligned} I^{[\text{Gauss}]} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} I^{[\text{SI}]} = \sqrt{\frac{c^2\mu_0}{4\pi c^2}} I^{[\text{SI}]} = c\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} 1\text{A} = 1\text{A} \times 2.998 \times 10^{10}\text{cm}\,\text{s}^{-1}\sqrt{\frac{10^{-7} \times 10^3\text{g} \times 10^2\text{cm}}{\text{A}^2\text{s}^2}} \\ &= 2.998 \times 10^9\text{g}^{1/2}\text{cm}^{3/2}\text{s}^{-2} = 2.998 \times 10^9\text{statampere} = 1\text{A}. \end{aligned}$$

Damit folgt $I = 0.57\text{A} = 1.7 \times 10^9$statampere.

Eine Sicherung in der Wohnung begrenzt typischerweise auf 10 A oder 16 A. Somit würde die Sicherung nicht anspringen. (Zum Vergleich: Bei 230 V entspricht das einer Leistung von 0.57 A * 230 V $\approx$ 130 W, also vergleichbar mit der Leistung einer Glühlampe).