Lösungen zu Blatt 3 **26.03.2010**

3.1 Greensche Funktion der Klein-Gordon Gleichung

Die Klein-Gordon Gleichung ist eine relativistische Erweiterung der Schrödinger-Gleichung, die unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Sie ist gegeben durch

$$\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\vec{r},t) = 0, \qquad \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Die zugehörige Greensche Funktion soll folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)D(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = -4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t').$$

a) Bestimme die Greensche Funktion $D(\vec{k},\omega)$ im Impulsraum.
Fourier-transformierte Größen

$$\begin{aligned} D(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\int \mathrm{d}\omega e^{-i\omega(t-t')}D(\vec{k},\omega), \\ \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\int \mathrm{d}\omega e^{-i\omega(t-t')}1, \end{aligned}$$

oben einsetzen liefert

$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)D(\vec{k},\omega) = -4\pi$$

$$D(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}} = \frac{4\pi}{\epsilon_k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

b) Berechne die Greensche Funktion in der „gemischten Darstellung“ $D(\vec{k},t-t')$, in der nur die ω-Komponente über eine Fourier-Transformation zurücktransformiert wird. Beachte dabei, dass $D(\vec{k},\omega)$ Pole auf dem Integrationsweg enthält. Gemäß der Vorlesung sollen die Pole daher in die komplexe Ebene verschoben werden, um die ω-Integration mit Hilfe des Residuensatzes durchführen zu können. Bestimme die retardierte D_{ret}, avancierte D_{av}, kausale (Feynman) D_c, anti-kausale (Anti-Feynman) D_{ac}, und die Cauchysche Hauptwertlösung D_p für die Greensche Funktion in der gemischten Darstellung.
Gemischte Darstellung:

$$D(\vec{k},t-t') = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega e^{-i\omega(t-t')}D(\vec{k},\omega)$$

Offensichtlich liegen die Pole entlang der reellen Achse, sodass Polvorschriften notwendig werden:

$$D(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{\epsilon_k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{4\pi}{\left(\epsilon_k + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k - \frac{\omega}{c}\right)} \to \frac{4\pi}{\left(\epsilon_k \pm i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k \pm i\eta - \frac{\omega}{c}\right)}$$

- Fall 1: Avanciert: die Pole liegen bei $\omega_1/c = -\epsilon_k + i\eta$, $\omega_2/c = +\epsilon_k + i\eta$
  a) Für $t-t' > 0$ kann der Integrationsweg der ω Integration durch einen Halbkreis in der unteren Halbebene geschlossen werden, ohne das Resultat zu ändern (siehe Abb. 1). Das geht deshalb, weil in der Fourier-Transformation $\exp(-i\omega(t-t')) = \exp(-i(\omega_r + i\omega_i)(t-t')) = \exp(-i\omega_r(t-t'))\times\exp(\omega_i(t-t'))$ exponentiell bei negativem Imaginärteil $\omega_i = \mathrm{Im}\,\omega$ abfällt, und nahe der reellen Achse die Greensche

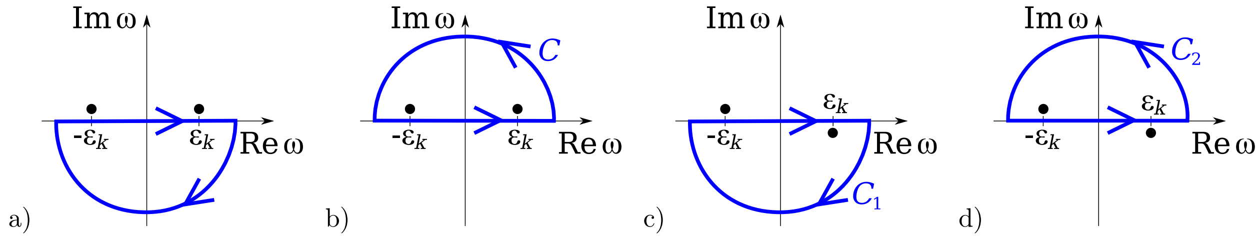

Abbildung 1: Verschieden gewählte Integrationswege: (a) und (b) gelten für Fall 1 (beide Pole in der oberen Halbebene) mit (a) $\omega > 0$ und (b) $\omega < 0$. (c) und (d) gelten für Fall 3 (ein Pol in der unteren, einer in der oberen Halbebene) mit (c) $\omega > 0$ und (d) $\omega < 0$. (Darstellungen für $c = 1$)

Funktion sowieso wie $1/\omega^2$ abfällt. Für diese Polvorschrift fällt kein Pol innerhalb des Integrationsweges, daher verschwindet auch das gesamte Linienintegral gemäß dem Residuensatz. Deshalb muss auch das Integral entlang der reellen Achse verschwinden.
b) Für $t - t' < 0$ schließt man den Integrationsweg in der oberen Halbebene. Nun befinden sich zwei Pole im eingeschlossenen Bereich. Mit dem Residuensatz erhält man

$$
\begin{aligned}
D_{av}(\vec{k}, t-t') &= \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega\left(t-t'\right)} \frac{4\pi}{\left(\epsilon_k - i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k + i\eta - \frac{\omega}{c}\right)} \\
&= \lim_{\eta\to 0} \Theta(-t+t') \frac{1}{2\pi} \oint_C d\omega e^{-i\omega\left(t-t'\right)} \frac{4\pi}{\left(\epsilon_k - i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k + i\eta - \frac{\omega}{c}\right)} \\
&= \lim_{\eta\to 0} \Theta(-t+t') \frac{2\pi i}{2\pi} \left[\underset{\omega=c(-\epsilon_k+i\eta)}{\mathrm{Res}} + \underset{\omega=c(+\epsilon_k+i\eta)}{\mathrm{Res}} \right] \frac{4\pi e^{-i\omega\left(t-t'\right)}}{\left(\epsilon_k - i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k + i\eta - \frac{\omega}{c}\right)} \\
&= \lim_{\eta\to 0} i \left[\lim_{\omega\to c(-\epsilon_k+i\eta)} (\omega + c\epsilon_k - ic\eta) \frac{4\pi e^{-i\omega\left(t-t'\right)}}{\left(\epsilon_k - i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k + i\eta - \frac{\omega}{c}\right)} + \lim_{\omega\to c(+\epsilon_k+i\eta)} \ldots \right] \\
&= \Theta(-t+t') 4\pi c i \left(\frac{e^{i\epsilon_k c\left(t-t'\right)}}{2\epsilon_k} + (-1) \frac{e^{-i\epsilon_k c\left(t-t'\right)}}{2\epsilon_k} \right) \\
&= -\Theta(-t+t') 4\pi c \frac{\sin(\epsilon_k c(t-t'))}{\epsilon_k}
\end{aligned}
$$

- Fall 2: Retardiert: die Pole liegen bei $\omega_1/c = -\epsilon_k - i\eta$, $\omega_2/c = +\epsilon_k - i\eta$
  Das Integral wird analog wie im ersten Fall berechnet, nur führt hier der Integrationsweg in der unteren Halbebene zu einem Beitrag. Beachte, dass der Integrationsweg hier im Uhrzeigersinn, also mathematisch negativ, verläuft, was zu einem weiteren Minus führt:

$$
\begin{aligned}
D_{ret}(\vec{k}, t-t') &= \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega\left(t-t'\right)} \frac{4\pi}{\left(\epsilon_k + i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k - i\eta - \frac{\omega}{c}\right)} \\
&= +\Theta(t-t') 4\pi c \frac{\sin(\epsilon_k c(t-t'))}{\epsilon_k}
\end{aligned}
$$

- Fall 3: Kausal: die Pole liegen bei $\omega_1/c = -\epsilon_k + i\eta$, $\omega_2/c = +\epsilon_k - i\eta$
  In den Vorlesungsfolien entspricht der Nenner $\left(\epsilon_k - i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k - i\eta - \frac{\omega}{c}\right) = \epsilon_k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - 2i\eta\epsilon_k \approx \epsilon_k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i\eta$ für $\epsilon_k > 0$.
  Für jeden der beiden Fälle $t - t' > 0$ oder < 0 liegt jeweils ein Pol in der unteren Hälfte, und einer in

der oberen Hälfte (siehe Abb. 1 (c) und (d)). Man erhält somit

$$\begin{aligned}
D_c(\vec{k}, t-t') &= \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega e^{-i\omega\left(t-t'\right)}\frac{4\pi}{\left(\epsilon_k - i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k - i\eta - \frac{\omega}{c}\right)} \\
&= \lim_{\eta\to 0}\Theta(t-t')\frac{1}{2\pi}\oint_{C_1}\mathrm{d}\omega e^{-i\omega\left(t-t'\right)}\frac{4\pi}{\left(\epsilon_k - i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k - i\eta - \frac{\omega}{c}\right)} \\
&\quad + \lim_{\eta\to 0}\Theta(-t+t')\frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\mathrm{d}\omega e^{-i\omega\left(t-t'\right)}\frac{4\pi}{\left(\epsilon_k - i\eta + \frac{\omega}{c}\right)\left(\epsilon_k - i\eta - \frac{\omega}{c}\right)} \\
&= -\Theta(t-t')4\pi ci(-1)\frac{e^{-i\epsilon_k c\left(t-t'\right)}}{2\epsilon_k} + 4\pi ci\Theta(-t+t')\frac{e^{i\epsilon_k c\left(t-t'\right)}}{2\epsilon_k} \\
&= \frac{2\pi ci}{\epsilon_k}\left(\Theta(t-t')e^{-i\epsilon_k c\left(t-t'\right)} + \Theta(-t+t')e^{i\epsilon_k c\left(t-t'\right)}\right)
\end{aligned}$$

Beachte, dass C_1 im Uhrzeigersinn und C_2 gegen den Uhrzeigersinn verläuft.

- Fall 4: Anti-Kausal: die Pole liegen bei $\omega_1/c = -\epsilon_k - i\eta$, $\omega_2/c = +\epsilon_k + i\eta$
  Hier braucht man das Ergebnis komplex zu konjugieren, und erhält

$$\begin{aligned}
D_a(\vec{k}, t-t') &= \left(D_c(\vec{k}, t-t')\right)^* \\
&= -\frac{2\pi ci}{\epsilon_k}\left(\Theta(t-t')e^{i\epsilon_k c\left(t-t'\right)} + \Theta(-t+t')e^{-i\epsilon_k c\left(t-t'\right)}\right)
\end{aligned}$$

- Fall 5: Cauchysche Hauptwertlösung
  Hier bildet man einfach

$$\begin{aligned}
D_p(\vec{k}, t-t') &= \frac{1}{2}\left(D_{ret}(\vec{k}, t-t') + D_{av}(\vec{k}, t-t')\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\Theta(-t+t')4\pi c\frac{\sin(\epsilon_k c(t-t'))}{\epsilon_k} - \Theta(t-t')4\pi c\frac{\sin(\epsilon_k c(t-t'))}{\epsilon_k}\right) \\
&= 2\pi c\frac{\sin(\epsilon_k c|t-t'|)}{\epsilon_k}
\end{aligned}$$

3.2 Impulsbilanz

Leite die in der Vorlesung angegebene Formel zur Impulsbilanz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}^{\mathrm{mech}} = \oint_{\partial V}\mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}}(\vec{r}, t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}^{\mathrm{feld}}$$

ausgehend von der Lorentzkraftdichte unter Verwendung der Maxwellgleichungen Schritt für Schritt her. Hierbei soll die Indexschreibweise verwendet werden, und durch sorgfältige Klammersetzung klar sein, auf welche Terme eine Ableitung jeweils wirkt.
Integrieren der Lorentzkraftdichte gibt

$$\vec{F}^{\mathrm{mech}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}^{\mathrm{mech}} = \int_V \mathrm{d}^3 r\left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\right).$$

In Indexschreibweise:

$$F_k^{\mathrm{mech}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_k^{\mathrm{mech}} = \int_V \mathrm{d}^3 r\left(\rho E_k + \frac{1}{c}\varepsilon_{klm}j_l\times B_m\right).$$

Aus den Maxwell-Gleichungen folgt (mit $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$)

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\partial_i E_i \qquad \overset{E_k\cdot}{\rightarrow} \qquad \rho E_k = \frac{1}{4\pi}E_k\left(\partial_i E_i\right)$$

$$0 = \frac{1}{4\pi}\partial_i B_i \qquad \xrightarrow{B_k\cdot} \qquad 0 = \frac{1}{4\pi} B_k \left(\partial_i B_i\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} j_l = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{lpq}\partial_p B_q - \frac{1}{4\pi c}\dot{E}_l \qquad \xrightarrow{\varepsilon_{klm}B_m} \qquad \frac{1}{c}\varepsilon_{klm} j_l B_m &= \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{lpq}\left(\partial_p B_q\right) B_m - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{E}_l B_m \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\delta_{mp}\delta_{kq} - \delta_{mq}\delta_{kp}\right)\left(\partial_p B_q\right) B_m - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{E}_l B_m \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\left(\partial_p B_k\right) B_p - \left(\partial_k B_q\right) B_q\right) - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{E}_l B_m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{lpq}\partial_p E_q + \frac{1}{4\pi c}\dot{B}_l \qquad \xrightarrow{\varepsilon_{klm}E_m} \qquad 0 &= \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{lpq}\left(\partial_p E_q\right) E_m + \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{B}_l E_m \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\left(\partial_p E_k\right) E_p - \left(\partial_k E_q\right) E_q\right) + \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{B}_l E_m \\ &= \ldots - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm} E_l \dot{B}_m\end{aligned}$$

Im letzten Term wurde $l \leftrightarrow m$ umbenannt. Diese vier Gleichungen addieren ergibt

$$\begin{aligned}\rho E_k + \frac{1}{c}\varepsilon_{klm} j_l B_m &= \frac{1}{4\pi} E_k \left(\partial_i E_i\right) + \frac{1}{4\pi} B_k \left(\partial_i B_i\right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\left(\left(\partial_i B_k\right) B_i - \left(\partial_k B_q\right) B_q\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\left(\partial_i E_k\right) E_i - \left(\partial_k E_q\right) E_q\right) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{E}_l B_m - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm} E_l \dot{B}_m \\ &= \partial_i \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(B_q B_q + E_q E_q\right)\right] - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm} E_l B_m\end{aligned}$$

wobei $\left(\partial_k B_q\right) B_q = \frac{1}{2}\left[\left(\partial_k B_q\right) B_q + B_q \left(\partial_k B_q\right)\right] = \frac{1}{2}\partial_k \left(B_q B_q\right) = \frac{1}{2}\partial_i \delta_{ik} B^2$ und analog für E verwendet wurde. Aus der letzten Gleichung lassen sich bereits die Komponenten des Spannungstensors und der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes herauslesen:

$$T_{ik}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(B_q B_q + E_q E_q\right)\right]$$

$$g_{em,k}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm} E_l B_m$$

Konvertieren des Volumen-Integrals über $\partial_i T_{ik}$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral

$$\int_V \mathrm{d}^3 r\, \partial_i T_{ik}(\vec{r}, t) = \oint_{\partial V} \mathrm{d}^2 f_i\, T_{ik}(\vec{r}, t)$$

und Identifikation von

$$P_k^{\mathrm{feld}} = \int_V \mathrm{d}^3 r\, g_{em,k}(\vec{r}, t)$$

liefert bereits das gewünschte Ergebnis.

3.3 Fock-Schwinger Eichung

Eine in der Quantenfeldtheorie vorkommende (auch dort nur Eingeweihten bekannte) Eichbedingung ist die "zentrale" oder "Fock-Schwinger"-Eichung,

$$x_\mu A^\mu := ct\phi - \vec{x}\vec{A} = 0.$$

Sie zeichnet sich dadurch aus, dass die Eichpotentiale durch relativ einfache Umkehrformeln aus den Feldstärken bestimmt werden können:

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{x},t) &= -\int_0^1 d\alpha\,\alpha\,\vec{x}\cdot\vec{E}(\alpha\vec{x},\alpha t),\\
\vec{A}(\vec{x},\vec{t}) &= -\int_0^1 d\alpha\,\alpha\left[\vec{E}(\alpha\vec{x},\alpha t)ct+\vec{x}\times\vec{B}(\alpha\vec{x},\alpha t)\right].
\end{aligned}
$$

a) Berechne mit diesen Formeln die Eichpotentiale zu den Feldern

$$\vec{E}=\gamma(\lambda r^2-3r)e^{-\lambda r}\vec{e}_r,\quad \vec{B}=\beta(e^{-z\lambda},0,e^{-x\lambda}),$$

wobei γ,β,λ Konstante sind und überprüfe durch Einsetzen dieser Lösungen in

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A},$$

dass diese Eichpotentiale tatsächlich auf die angegebenen Felder führen.
Einsetzen in obige Formeln ergibt ($\vec{x}\vec{e}_r=r$)

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{x},t) &= -\int_0^1 d\alpha\,\alpha\,\vec{x}\cdot\gamma(\lambda\alpha^2r^2-3\alpha r)e^{-\lambda\alpha r}\vec{e}_r\\
&= -\int_0^1 d\alpha\,\gamma\left(\lambda\alpha^3r^3e^{-\lambda\alpha r}-3\alpha^2r^2e^{-\lambda\alpha r}\right)\\
&= -\int_0^1 d\alpha\,\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(-\alpha^3r^2e^{-\lambda\alpha r}\right)\\
&= \gamma\alpha^3r^2e^{-\lambda\alpha r}\Big|_0^1\\
&= \gamma r^2e^{-\lambda r}
\end{aligned}
$$

Für $\vec{A}$ ergibt sich nach einer analogen Rechnung

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= -\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha\left[\vec{E}(\alpha\vec{x},\alpha t)ct+\vec{x}\times\vec{B}(\alpha\vec{x},\alpha t)\right]\\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha\left[\gamma(\lambda r^2-3r)e^{-\lambda r}\vec{e}_rct+\beta\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}e^{-\alpha z\lambda}\\0\\e^{-\alpha x\lambda}\end{pmatrix}\right]\\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(-\alpha^3\gamma re^{-\lambda\alpha r}\right)\vec{e}_rct+\alpha\beta\begin{pmatrix}ye^{-\alpha x\lambda}\\ze^{-\alpha z\lambda}-xe^{-\alpha x\lambda}\\-ye^{-\alpha z\lambda}\end{pmatrix}\right]\\
&= \gamma re^{-\lambda r}ct\vec{e}_r+\beta\begin{pmatrix}y\frac{e^{-x\lambda}}{x\lambda}+y\frac{e^{-x\lambda}-1}{x^2\lambda^2}\\\frac{e^{-z\lambda}}{\lambda}+\frac{e^{-z\lambda}-1}{z\lambda^2}-\frac{e^{-x\lambda}}{\lambda}-\frac{e^{-x\lambda}-1}{x\lambda^2}\\-y\frac{e^{-z\lambda}}{z\lambda}-y\frac{e^{-z\lambda}-1}{z^2\lambda^2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde folgendes Integral verwendet:

$$\int_0^1 \alpha e^{M\alpha}\mathrm{d}\alpha=\frac{e^M}{M}-\frac{e^M-1}{M^2}$$

Überprüfen:

$$\vec{E}(\vec{x},t)=-\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t)=-\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,t)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t)=-\vec{e}_r\gamma\left(2re^{-\lambda r}-\lambda r^2e^{-\lambda r}+re^{-\lambda r}\right)$$

Der erste Term in $\vec{A}$ trägt nicht bei, wie aus $\vec{\nabla} \times (f(r)\vec{e}_r) = 0$ folgt. Der zweite Term bringt das gewünschte Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \beta \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y\frac{e^{-x\lambda}}{x\lambda} + y\frac{e^{-x\lambda}-1}{x^2\lambda^2} \\ \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda} + \frac{e^{-z\lambda}-1}{z\lambda^2} - \frac{e^{-x\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-x\lambda}-1}{x\lambda^2} \\ -y\frac{e^{-z\lambda}}{z\lambda} - y\frac{e^{-z\lambda}-1}{z^2\lambda^2} \end{pmatrix} \\
&= \beta \begin{pmatrix} -\frac{e^{-z\lambda}}{z\lambda} - \frac{e^{-z\lambda}-1}{z^2\lambda^2} - \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda}(-\lambda) - \frac{e^{-z\lambda}(-\lambda)z\lambda^2 - \left(e^{-z\lambda}-1\right)\lambda^2}{z^2\lambda^4} \\ 0 \\ -\frac{e^{-x\lambda}}{\lambda}(-\lambda) - \frac{e^{-x\lambda}(-\lambda)x\lambda^2 - \left(e^{-x\lambda}-1\right)\lambda^2}{x^2\lambda^4} - \frac{e^{-x\lambda}}{x\lambda} - \frac{e^{-x\lambda}-1}{x^2\lambda^2} \end{pmatrix} \\
&= \beta \begin{pmatrix} e^{-z\lambda} \\ 0 \\ e^{-x\lambda} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Verifiziere obige Formeln für die Eichpotentiale in ihrer Allgemeinheit durch Berechnung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus diesen, unter der Voraussetzung, dass diese die homogenen Maxwellgleichungen erfüllen. [Hinweis: Für die Berechnung von $\vec{E}$ sollen zunächst Terme der Form $\partial_t \vec{B}$ mit Hilfe der homogenen Maxwellgleichungen in Ausdrücke, die nur $\vec{E}$ enthalten, umgeschrieben werden. Der Integrand kann dann als totale Ableitung bezüglich α geschrieben werden. Für die Berechnung von $\vec{B}$ sind ebenfalls die homogenen Maxwellgleichungen anzuwenden.]

$$
\begin{aligned}
E_i &= -\partial_i \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A_i \\
&= \int_0^1 d\alpha \alpha \left[\partial_i \left(x_j E_j\right) + \frac{1}{c}\partial_t \left(E_i c t\right) + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} x_j \left(\partial_t B_k\right)\right] \\
&= \int_0^1 d\alpha \alpha \left[E_i + x_j \partial_i E_j + E_i + t\partial_t E_i - x_j \partial_i E_j + x_j \partial_j E_i\right] \\
&= \int_0^1 d\alpha \left[2\alpha E_i + \alpha^2 t \frac{\partial}{\partial(\alpha t)} E_i + \alpha^2 x_j \frac{\partial}{\partial(\alpha x_j)} E_i\right] \\
&= \int_0^1 d\alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\alpha^2 E_i\right)\right] \\
&= E_i.
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde die homogene Maxwellgleichung $\partial_t \vec{B} = -c\,\mathrm{rot}\vec{E}$ verwendet,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} x_j \left(\partial_t B_k\right) &= \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} x_j \left(-c\varepsilon_{klm}\partial_l E_m\right) \\
&= -\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) x_j \partial_l E_m \\
&= -x_j \partial_i E_j + x_j \partial_j E_i,
\end{aligned}
$$

und das totale Differenzial einer Funktion:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} E_i(\alpha x_m, \alpha t) &= \left[\frac{\partial(\alpha x_i)}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial(\alpha x_i)} + \frac{\partial(\alpha t)}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial(\alpha t)}\right] E_i(\alpha x_m, \alpha t) \\
&= \left[x_i \frac{\partial}{\partial(\alpha x_i)} + t\frac{\partial}{\partial(\alpha t)}\right] E_i(\alpha x_m, \alpha t) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + t\frac{\partial}{\partial t}\right] E_i(\alpha x_m, \alpha t)
\end{aligned}
$$

Für $\vec{B}$ geht man analog vor:

$$\begin{aligned}
B_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \\
&= -\int_0^1 d\alpha\alpha\left[\varepsilon_{ijk}\partial_j E_k ct + \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}x_l B_m\right] \\
&= -\int_0^1 d\alpha\alpha\left[-t(\partial_t B_i) - 2B_i - x_j\partial_j B_i\right] \\
&= \int_0^1 d\alpha\left[2\alpha B_i + \alpha^2 t\frac{\partial}{\partial(\alpha t)}B_i + \alpha^2 x_j\frac{\partial}{\partial(\alpha x_j)}B_i\right] \\
&= \int_0^1 d\alpha\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\alpha^2 B_i\right)\right] \\
&= B_i.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $\mathrm{rot}\vec{E} = -\partial_t\vec{B}/c$ und $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ verwendet:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}x_l B_m &= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\partial_j\left(x_l B_m\right) \\
&= \partial_j\left(x_i B_j\right) - \partial_j\left(x_j B_i\right) \\
&= B_i + x_i\left(\partial_j B_j\right) - 3B_i - x_j\left(\partial_j B_i\right) \\
&= -2B_i - x_j\partial_j B_i + x_i\underbrace{\partial_j B_j}_{=0}
\end{aligned}$$