Lösungen zu Blatt 4 **16.04.2010**

4.1 Kräfte zwischen Kreis- und Linienstrom

Gegeben sei ein unendlich langer dünner Leiter L_1, der im Abstand $x = d$ parallel zur y-Achse verläuft und von einem zeitlich konstanten Strom I_1 durchflossen wird.
a) Berechne das Magnetfeld und daraus ein Vektorpotential.
Zylinderkoordinaten werden entlang der y-Achse angewendet $(x, y, z \to z, x, y)$:

$$z = r\cos\varphi, \qquad x = r\sin\varphi, \qquad y = y, \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_z + \cos\varphi\vec{e}_x = -\frac{x}{r}\vec{e}_z + \frac{z}{r}\vec{e}_x$$

Translationsinvarianz bezüglich y-Achse liefert $B_i(r,\varphi,y) = B_i(r,\varphi)$, und $B_y = 0$. Außerdem gilt $B_r = 0$ wegen $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ oder in Integralform $\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{f} = 0 = 2B_r\pi r l$. Bleibt also B_φ zu berechnen. Für $\vec{B} = B_\varphi\vec{e}_\varphi$ erhält man:

$$\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}\mathrm{d}\vec{f} \qquad \to \qquad 2\pi r B_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c}I_1 \qquad \to \qquad B_\varphi(r) = \frac{2I_1}{cr}$$

$$\vec{B} = \frac{2I_1}{cr}\vec{e}_\varphi = \frac{2I_1}{c}\left(\frac{z}{z^2+x^2}, 0, -\frac{x}{z^2+x^2}\right) \qquad \xrightarrow{x\to x-d} \vec{B} = \frac{2I_1}{c}\left(\frac{z}{z^2+(x-d)^2}, 0, \frac{d-x}{z^2+(x-d)^2}\right).$$

Berechnung des Vektorpotentials über $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. Mit $\vec{A} \sim A_y(r)$ folgt $-\partial A_y/\partial r = B_\varphi$, und somit $A_y = (-2I_1/c)\ln r + c$.

$$A_y = -\frac{I_1}{c}\ln\left[z^2 + (x-d)^2\right].$$

b) Betrachte zusätzlich einen dünnen Leiter L_2, welcher einen Kreis mit Radius $a < d$ und Mittelpunkt im Ursprung bildet und ebenfalls in der x-y-Ebene liegt. Dieser werde von einem konstanten Strom I_2 durchflossen. Berechne die auf den Leiter L_2 wirkende Kraft $\vec{F}$.
Kraft auf Leiter: $\vec{F} = \frac{I_2}{c}\int_{L_2}\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B}(r)$, mit $\vec{r} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$. $\mathrm{d}\vec{r} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)a\mathrm{d}\varphi$, und $\vec{B}_1(z = 0) = (0, 0, 2I_1/(c(d-x)))$

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\int\mathrm{d}\varphi\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{d-x}\end{pmatrix}\\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\begin{pmatrix}\frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi}\\ \frac{\sin\varphi}{d-a\cos\varphi}\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\left[\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi} + \int_\pi^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi}\right]\\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}\frac{a}{d}\left[\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{1-\frac{a}{d}\cos\varphi} - \int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{1+\frac{a}{d}\cos\varphi}\right]\\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}\frac{a}{d}\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2}{d^2}}}\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{d^2}}-1}{-\frac{a}{d}}\times 2\\
&= \frac{4\pi}{c^2}I_1I_2\frac{d-\sqrt{d^2-a^2}}{\sqrt{d^2-a^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_y &\sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} + \int_\pi^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d - ax} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d + ax} = 2a \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d^2 + a^2x^2} = 0
\end{aligned}
$$

Hier wurde der Hinweis verwendet: $\int_0^\pi \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}-1}{\alpha}$ für $|\alpha| < 1$.

4.2 Leitende Ebene mit kugelförmiger Ausbuchtung

Eine unendlich ausgedehnte geerdete leitende Platte habe eine Ausbuchtung in Form einer Halbkugel mit Radius a. Eine Punktladung q werde auf die Symmetrieachse des Systems im Abstand $b > a$ vom Mittelpunkt der Halbkugel angebracht. Berechne mit Hilfe der Methode der Bildladungen das Potential ϕ sowie die auf der Halbkugel influenzierte Gesamtladung.
Ansatz: Bildladungen an der Kugel gespiegelt, an der Ebene gespiegelt, und die gespiegelte Bildladung an der anderen Fläche wieder gespiegelt:

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{q}{|\vec{r} - b\vec{e}_z|} - \frac{q'}{|\vec{r} - b'\vec{e}_z|} + \frac{q'}{|\vec{r} + b'\vec{e}_z|} - \frac{q}{|\vec{r} + b\vec{e}_z|}, \qquad \text{mit}\, q' = q\frac{a}{b}, \quad b' = \frac{a^2}{b}. \\
&= \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}} - \frac{qa}{b\sqrt{a^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2r\frac{a^2}{b}\cos\theta}} + \frac{qa}{b\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{b^2} + 2r\frac{a^2}{b}\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 + 2rb\cos\theta}}
\end{aligned}
$$

Das erfüllt die Randbedingungen auf der Ebene

$$
\phi(x, y, 0) = \frac{q^2}{\sqrt{R^2 + b^2}} - \frac{q^2}{\sqrt{R^2 + b^2}} - \frac{q'^2}{\sqrt{R^2 + b'^2}} + \frac{q'^2}{\sqrt{R^2 + b'^2}} = 0, \qquad \text{mit}\, R^2 = x^2 + y^2,
$$

und auf der Halbkugel

$$
\phi(r = a) = \frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}} - \frac{qa}{b\sqrt{a^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2a\frac{a^2}{b}\cos\theta}} + \frac{qa}{b\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{b^2} + 2a\frac{a^2}{b}\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}} = 0.
$$

Berechnung der influenzierten Ladungsdichte über $4\pi\sigma = E_r(r = a)$ und $E_r = -\partial\phi/\partial_r$:

$$
\frac{\partial\phi}{\partial r} = \left(-\frac{1}{2}q\right) \frac{2r - 2b\cos\theta}{(...)^{3/2}} - \frac{qa}{b}\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2r - 2\frac{a^2}{b}\cos\theta}{(...)^{3/2}} + (q \leftrightarrow -q\, \text{und}\, \cos\theta \leftrightarrow -\cos\theta)
$$

Einsetzen von $r = a$ liefert nach einer längeren, aber nicht komplizierten Rechnung

$$
\frac{\partial\phi}{\partial r}(r = a) = ... = -\frac{q\left(a - \frac{b^2}{a}\right)}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}} + \frac{q\left(a - \frac{b^2}{a}\right)}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)^{3/2}}.
$$

Daraus folgt mit $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi}{\partial r}(r = a)$:

$$
\sigma = \frac{1}{4\pi} qa \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \left(\frac{1}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)^{3/2}}\right).
$$

Die Gesamtladung ergibt sich aus Integration über die Halbkugel

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_F \sigma \mathrm{d}^2 f \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta a^2 \sigma \\
&= a^2 \frac{1}{4\pi} qa \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}u \left(\frac{1}{(a^2+b^2-2abu)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+b^2+2abu)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} qa^3 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \left(\frac{-2}{\sqrt{a^2+b^2-2abu}} \left(-\frac{1}{2ab}\right) + \frac{1}{ab} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+2abu}} \right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} qa^3 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b+a} - \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} q \frac{a^2-b^2}{a} \frac{1}{ab} \left(\frac{2b}{b^2-a^2} - \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\
&= -q \left(1 - \frac{b^2-a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}} \right).
\end{aligned}
$$

4.3 Multipolmomente homogen geladener Ostereier

Gegeben seien drei bezüglich der z-Achse rotationssymmetrische Ellipsoide mit Hauptachsen $a = b$, c.
a) Das erste Ellipsoid sei homogen mit Raumladungsdichte ρ_0 geladen. Berechne hierfür die elektrostatischen sphärischen Multipolmomente q_{lm} mit $l \leq 2$ und schreibe das elektrostatische Potential in der entsprechenden Näherung für $r > \max(a, c)$ an.
Elektrostatisches Potential über Kugelflächenfunktionen:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} q_{lm}^*, \qquad \text{mit}\, q_{lm} = \int \mathrm{d}^3 r'\, r'^l Y_{lm}(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{r}\,').$$

Multipolmomente mit negativem m lassen sich berechnen über $q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*$, was direkt von der entsprechenden Relation der Y_{lm} folgt.
Da das System rotationssymmetrisch um die z-Achse ist, fallen alle Y_{lm} die φ enthalten weg:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \mathrm{d}\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} e^{2i\varphi} \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Also $q_{11} = q_{22} = q_{21} = 0$. Da $Y_{10} \sim \cos\vartheta = z/r$ ungerade bezüglich z ist, aber das Ellipsoid symmetrisch entlang der z-Achse, verschwindet das entsprechende Integral, daher auch q_{10}. Das sieht man auch über

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\vartheta) \cos\vartheta = 0.$$

Bleiben also nur q_{00} und q_{20} zu berechnen.

$$
\begin{aligned}
q_{00} &= \int \mathrm{d}^3 r\, r^0 Y_{00}(\vartheta, \varphi) \rho(\vec{r}) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{4\pi}{3} a^2 c \rho_0.
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde das Volumen des Ellipsoids eingesetzt. Man kann es über die angegebene Variablentransformation erhalten:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a} = \tilde{r} \sin\tilde{\vartheta} \cos\tilde{\varphi}, \qquad \tilde{y} = \frac{y}{a} = \tilde{r} \sin\tilde{\vartheta} \sin\tilde{\varphi}, \qquad \tilde{z} = \frac{z}{c} = \tilde{r} \cos\tilde{\vartheta}.$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3r\,\rho(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\rho(\vec{r}) = a^2c\int \mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}\mathrm{d}\tilde{z}\,\rho(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = a^2c\int_0^1 \tilde{r}^2\mathrm{d}\tilde{r}\int_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\tilde{\varphi}\rho_0 \\ &= a^2c\frac{1}{3}\times 2\times 2\pi = \frac{4\pi}{3}a^2c.\end{aligned}$$

Berechnung von q_{20} erfolgt analog:

$$\begin{aligned}q_{20} &= \int \mathrm{d}^3r\,r^2Y_{20}(\vartheta,\varphi)\rho(\vec{r}) \\ &= \int \mathrm{d}^3r\,r^2\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\vartheta-1\right)\rho(\vec{r}) \\ &= \int \mathrm{d}^3r\,r^2\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{3z^2-r^2}{r^2}\rho(\vec{r}) \\ &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int \mathrm{d}^3r\,\left(3z^2-r^2\right)\rho(\vec{r}) \\ &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}a^2c\int_0^1 \tilde{r}^2\mathrm{d}\tilde{r}\int_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\tilde{\varphi}\left[3c^2\tilde{r}^2\cos^2\tilde{\vartheta}-a^2\tilde{r}^2\left(1-\cos^2\tilde{\vartheta}\right)-c^2\tilde{r}^2\cos^2\tilde{\vartheta}\right]\rho_0 \\ &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}a^2c\int_0^1 \tilde{r}^4\mathrm{d}\tilde{r}\int_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})2\pi\left[\left(2c^2+a^2\right)\cos^2\tilde{\vartheta}-a^2\right]\rho_0 \\ &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}a^2c\frac{1}{5}2\pi\left[\left(2c^2+a^2\right)\frac{2}{3}-2a^2\right]\rho_0 \\ &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{4\pi}{3}a^2c\rho_0\frac{2}{5}\left(c^2-a^2\right).\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet:

$$r^2=x^2+y^2+z^2=a^2\left(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2\right)+c^2\tilde{z}^2=a^2\tilde{r}^2\sin^2\tilde{\vartheta}+c^2\tilde{r}^2\cos^2\tilde{\vartheta}=a^2\tilde{r}^2\left(1-\cos^2\tilde{\vartheta}\right)+c^2\tilde{r}^2\cos^2\tilde{\vartheta}$$

Das Potential kann dann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= 4\pi\frac{Y_{00}(\vartheta,\varphi)}{r}q_{00}^*+\frac{4\pi}{5}\frac{Y_{20}(\vartheta,\varphi)}{r^3}q_{20}^* \\ &= 4\pi\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\frac{4\pi}{3}a^2c\rho_0+\frac{4\pi}{5}\frac{1}{r^3}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\vartheta-1\right)\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{4\pi}{3}a^2c\rho_0\frac{2}{5}\left(c^2-a^2\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}a^2c\rho_0\left(\frac{1}{r}+\frac{c^2-a^2}{10}\frac{3\cos^2\vartheta-1}{r^3}\right).\end{aligned}$$

b) Das zweite Ellipsoid von der selben Form sei für $z>0$ positiv und für $z<0$ negativ mit Raumladungsdichte $\pm\rho_0$ geladen. Wie sehen die entsprechenden Multipolmomente und Potentiale für $l\leq 2$ aus (wieder bezüglich des Zentrums des Ellipsoids)?

Für das zweite Ellipsoid gilt $q_{00}=0$, da sich die positiven und negativen Ladungen integriert gegenseitig aufheben. Bleiben also nur Dipolmomente. Weiters folgt $q_{11}=0$ aufgrund der Rotationssymmetrie um φ.

Bleibt q_{10} zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
q_{10} &= \int \mathrm{d}^3 r\, r Y_{10}(\vartheta,\varphi)\rho(\vec{r}) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r\, r \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \mathrm{d}^3 r\, z\rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a^2 c \int_0^1 \tilde{r}^2 \mathrm{d}\tilde{r} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tilde{\varphi} \left[\int_{-1}^0 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta}) c\tilde{r}\cos\tilde{\vartheta}(-\rho_0) + \int_0^1 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta}) c\tilde{r}\cos\tilde{\vartheta}(+\rho_0) \right] \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a^2 c \int_0^1 \tilde{r}^3 \mathrm{d}\tilde{r} 2\pi c \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a^2 c \frac{1}{4} 2\pi c \rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\pi}{2} a^2 c^2 \rho_0 .
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie um den Winkel φ verwinden auch $q_{21} = q_{22} = 0$. Weiters verschwindet $q_{20} = 0$, weil $Y_{20} \sim (3\cos^2\vartheta - 1)$ gerade in $\cos\vartheta$ ist, aber die Ladungsverteilung $\rho(\vartheta)$ ungerade. Die Potential des Dipols lautet:

$$
\begin{aligned}
\phi^{(b)}(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{3} \frac{Y_{10}(\vartheta,\varphi)}{r^2} q_{10}^* \\
&= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\pi}{2} a^2 c^2 \rho_0 \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\pi}{2} a^2 c^2 \rho_0 \cos\vartheta .
\end{aligned}
$$

c) In welche Richtung wirkt die Kraft auf das erste Ei, wenn es sehr weit weg vom zweiten Ei platziert wird (in Abhängigkeit von ϑ und φ)? (Es braucht nur der führende nicht-verschwindende Term der Entwicklung angegeben werden).

In großen Entfernungen wirkt das erste Ellipsoid wie ein elektrischer Monopol, also wie eine Punktladung mit Gesamtladung $Q = 4\pi a^2 c\rho_0/3$, und das zweite Ellipsoid wie ein elektrischer Dipol. Zu untersuchen ist also die Wirkung eines elektrischen Dipolfeldes auf eine Punktladung. Wegen $\vec{F} = q\vec{E}$ genügt es, das elektrische Feld zu kennen. Dieses ist über $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ berechenbar.

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$
\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} .
$$

Man erhält dann:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi \\
&= -\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\cos\vartheta \\
&= -\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\left(\vec{e}_r\frac{-2}{r^3}\cos\vartheta + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r^3}(-\sin\vartheta) + \vec{e}_\varphi 0\right) \\
&= \frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{1}{r^3}\left(2\vec{e}_r\cos\vartheta + \vec{e}_\vartheta\sin\vartheta\right) \\
&= \frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{1}{r^5}\begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{3\left(\vec{e}_z\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{e}_z}{r^5},
\end{aligned}
$$

wobei die letzten vier Zeilen verschiedene Varianten des Endergebnisses sind. Hierbei wurden die Einheitsvektoren verwendet:

$$
\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Die Kraft ergibt sich aus $\vec{F} = Q\vec{E}$ mit $Q = 4\pi a^2 c\rho_0/3$:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= Q\vec{E} \\
&= \frac{4\pi a^2 c\rho_0}{3}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2\pi^2a^4c^3\rho_0^2}{3r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{8}Q^2c\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{8}Q^2c\begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{8}Q^2c\frac{3\left(\vec{e}_z\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{e}_z}{r^5}
\end{aligned}
$$

wobei das Ergebnis in verschiedenen möglichen Varianten aufgeschrieben wurde.

d) Freiwillige Fleißaufgabe: Das dritte Ellipsoid sei für $x > 0$ positiv und für $x < 0$ negativ geladen. Welche Multipolmomente q_{lm} für $l \leq 2$ verschwinden nicht?

Man kann sich überlegen:

q_{00}, q_{10}, q_{20} verschwinden aufgrund der φ-Integration $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho_0\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-\rho_0)\mathrm{d}\varphi = \pi\rho_0 - \pi\rho_0 = 0$. q_{22} verschwindet ebenfalls aufgrund der φ-Integration, da die Integrationen über die Intervalle $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2i\varphi}\rho_0\mathrm{d}\varphi = 0$ und $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{2i\varphi}(-\rho_0)\mathrm{d}\varphi = 0$ separat verschwinden. q_{21} verschwindet aufgrund der ϑ-Integration in jedem Ladungsbereich separat, da der Integrand als Funktion von ϑ ungerade ist. Die einzige nicht-verschwindende Komponenten bleibt demnach $q_{11} = -q_{1,-1}^*$.