Lösungen zu Blatt 5 **30.04.2010**

5.1 Kugelförmiger Elektret

Ein elektrisch *permanent* polarisierter kugelförmiger Isolator (Elektret) mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung besitzt die Polarisation $\vec{P}(\vec{r}) = P_0 \frac{r}{a} \vec{e}_r,\ P_0 > 0$.
a) Berechne die Polarisations-Volumsladungsdichte ρ_P im Inneren der Kugel und die Polarisations-Flächenladungsdichte σ_P auf der Kugeloberfläche sowie die Gesamtladung der Kugel.
Im Inneren der Kugel $r < a$ hat man $\rho_P(\vec{r}) = -\mathrm{div}\vec{P}(\vec{r}) = -\frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 P_r(r)\right) = -\frac{1}{r^2}\partial_r \left(P_0 \frac{r^3}{a}\right) = -\frac{3P_0}{a} =: \rho_0$.
Am Rand der Kugel $r = a$ gilt: $\sigma_p = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{P}_\mathrm{a}}_{0} - \vec{P}_\mathrm{i}) = +P_r(r \to a) = P_0 =: \sigma_0$.

Gesamtladung: $q_P = \frac{4\pi a^3}{3}\rho_0 + 4\pi a^2 \sigma_0 = \frac{4\pi a^3}{3}\left(-\frac{3P_0}{a}\right) + 4\pi a^2 P_0 = 0$.
b) Berechne im gesamten Raum das von der polarisierten Kugel verursachte $\vec{E}$-Feld. Gib ferner für den gesamten Raum das zugehörige $\vec{D}$-Feld an und kommentiere das Ergebnis für $\vec{D}$.
<u>Lösungsweg 1</u>: über das $\vec{E}$ Feld
$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi(\underbrace{\rho(\vec{r})}_{0} + \rho_P(\vec{r})), \qquad \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$.

Radialsymmetrie: $E_\theta = 0,\ E_\varphi = 0$. Im Inneren gilt: $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho_P(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 E_r) = 4\pi\rho_0 \Rightarrow r^2 E_r = 4\pi\rho_0 \int_0^r r'^2 \mathrm{d}r' = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \Rightarrow E_r = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r = -4\pi P_0 \frac{r}{a}$ für $r < a$.
Außen gilt: $\vec{E} = 0$.
Daraus folgt $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = -4\pi P_0 \frac{r}{a}\vec{e}_r + 4\pi P_0 \frac{r}{a}\vec{e}_r = 0$ innen und außen.
<u>Lösungsweg 2</u>: über das $\vec{D}$ Feld
$r < a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \underbrace{\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$r > a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ (auch keine Quellen und Wirbel von $\vec{D}$ im Unendlichen)
$r = 0$: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma = 0, \qquad \mathrm{Rot}\vec{D} = \underbrace{\mathrm{Rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{Rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ im ganzen Raum} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) - 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = -4\pi\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi P_0 \frac{r}{a}\vec{e}_r & \text{fr } r < a \\ \vec{0} & \text{fr } r > a. \end{cases}$$

5.2 Maxwellscher Spannungstensor

Eine ruhende Punktladung q befinde sich in einem homogenen elektrostatischen Feld $\vec{E}^{(\mathrm{ex})}$, welches von Quellen im Unendlichen erzeugt wird. Nach dem Kraftgesetz von Lorentz wirkt dann auf die Punktladung die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}^{(\mathrm{ex})}$. Leite diese Formel für die Kraft auf die Punktladung mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors her.
Anleitung: Wähle den Ort der Punktladung als Ursprung und die Richtung von $\vec{E}^{(\mathrm{ex})}$ als z-Richtung. Beachte, dass in den Maxwellschen Spannungstensor die Komponenten des Gesamtfeldes eingehen! Wähle als geschlossene Oberfläche eine Kugel mit Radius r um den Ursprung.
Gesamtfeld: $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \vec{E}^{(\mathrm{ex})}$ mit $\vec{E}^{(\mathrm{ex})} = (0, 0, E^{(\mathrm{ex})})$, bzw. $E_i = \frac{q x_i}{r^3} + E^{(\mathrm{ex})}\delta_{i3}$.
$F_j = \oint_{\partial V} (\mathrm{d}^2\vec{f})_i T_{ij}$ mit $(\mathrm{d}^2\vec{f})_i = n_i \mathrm{d}^2 f = n_i r^2 \mathrm{d}\Omega,\ n_i = \frac{x_i}{r},\ T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right)$.
$F_j = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} \mathrm{d}\Omega \underbrace{(r x_i E_i E_j - \frac{1}{2} r x_j E^2)}_{=:I_j}$

$$
\begin{aligned}
I_j &= rx_i\left(\frac{qx_i}{r^3}+E^{(\mathrm{ex})}\delta_{i3}\right)\left(\frac{qx_j}{r^3}+E^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}\right)-\frac{1}{2}rx_j\left(\frac{q^2r^2}{r^6}+2\frac{qx_3}{r^3}E^{(\mathrm{ex})}+E^{(\mathrm{ex})2}\right)\\
&= rx_i\frac{qx_i}{r^3}\frac{qx_j}{r^3}+rx_iE^{(\mathrm{ex})}\delta_{i3}\frac{qx_j}{r^3}+rx_i\frac{qx_i}{r^3}E^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}+rx_iE^{(\mathrm{ex})}\delta_{i3}E^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}\\
&\quad -\frac{1}{2}rx_j\frac{q^2r^2}{r^6}-\frac{1}{2}rx_j2\frac{qx_3}{r^3}E^{(\mathrm{ex})}-\frac{1}{2}rx_jE^{(\mathrm{ex})2}\\
&= \frac{q^2}{r^3}x_j+x_3E^{(\mathrm{ex})}\frac{qx_j}{r^2}+qE^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}+rx_3E^{(\mathrm{ex})2}\delta_{j3}-\frac{1}{2}x_j\frac{q^2}{r^3}-x_j\frac{qx_3}{r^2}E^{(\mathrm{ex})}-\frac{1}{2}rx_jE^{(\mathrm{ex})2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{q^2x_j}{r^3}+qE^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}+rx_3E^{(\mathrm{ex})2}\delta_{j3}-\frac{1}{2}rx_jE^{(\mathrm{ex})2}
\end{aligned}
$$

Bei der Integration $\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega I_j$ fallen alle Terme $\propto x_j$ oder $\propto x_3$ weg, da $\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega x_k = 0$ (kann man explizit zeigen durch Einsetzen von $x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $x_3 = r\cos\vartheta$.
Daher bleibt $F_j = qE^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega = qE^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}$, oder $\vec{F} = q\vec{E}^{(\mathrm{ex})}$.

5.3 Kreisförmige Plattenkondensatoren

Gegeben sei eine Anordnung von zwei unendlich dünnen parallelen kreisförmigen Metallplatten mit Radius R_0, Abstand $d \ll R_0$ und den freien Gesamtladungen $+Q$ bzw. $-Q$. Der Raum zwischen den Platten sei mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen Dielektrizitätskonstante gemäß $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \Delta\epsilon\frac{z}{d}$ vom Ort abhängt.
a) Berechne die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, das Polarisationsfeld $\vec{P}$ und das Verschiebungsfeld $\vec{D}$ im Dielektrikum.
Wegen $d \ll R_0$ können Randeffekte vernachlässigt werden: $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ besitzen nur eine z-Komponente, σ, σ_P sind homogen auf den Metallplatten, ρ_P hängt nur von z ab.
Freie Flächenladungen bei $z = 0$ und $z = d$: $\sigma(z = d) = Q/(\pi R_0^2)$, $\sigma(z = 0) = -Q/(\pi R_0^2)$.
Es ist zweckmäßig, zuerst $\vec{D}$ zu berechnen: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma$, $\mathrm{div}\vec{D} = \partial_z D_z(z) = 4\pi\rho = 0$ innen und außen. $\Rightarrow$ $\vec{D}$-Feld ist im Dielektrikum homogen. Obere Platte: $\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n}\cdot(\underbrace{\vec{D}_a}_{0} - \underbrace{\vec{D}_i}_{D_z}) = 4\pi\sigma = 4Q/R_0^2 \Rightarrow$
$\vec{D}(\vec{r}) = -4Q/R_0^2\vec{e}_z$ im Dielektrikum.
$\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\vec{e}_z$ mit $E_z(z) = D_z/\epsilon(z)$, $\vec{P}(\vec{r}) = P_z(z)\vec{e}_z$, $P_z(z) = \chi_e E_z(z) = \frac{\epsilon-1}{4\pi}E_z(z) = \frac{1}{4\pi}(1-\frac{1}{\epsilon})D_z$

$$
\Rightarrow E_z(z) = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0+\Delta\epsilon\frac{z}{d}}, \qquad P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1-\frac{1}{\epsilon_0+\Delta\epsilon\frac{z}{d}}\right)
$$

b) Berechne die Flächenladungsdichten freier Ladungen und Polarisationsladungen bei $z = d$ und $z = 0$ sowie die Polarisations-Raumladungsdichte im Dielektrikum.
Freie Flächenladungsdichte σ: siehe (a).
Polarisations-Flächenladungsdichte $\sigma_P = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n}\cdot(\underbrace{\vec{P}_a}_{0} - \underbrace{\vec{P}_i}_{P_z(d)})$

$$
\Rightarrow \sigma_P(z=d) = P_z(d) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1-\frac{1}{\epsilon_0+\Delta\epsilon}\right), \qquad \sigma_P(z=0) = -P_z(d) = \frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1-\frac{1}{\epsilon_0}\right)
$$

Polarisationsraumladungsdichte: $\rho_P(z) = -\mathrm{div}\vec{P} = -\partial_z P_z(z) = \frac{Q}{\pi R_0^2 d}\frac{\Delta\epsilon}{\left(\epsilon_0+\Delta\epsilon\frac{z}{d}\right)^2}$ im Dielektrikum.
c) Berechne die Kapazität der Anordnung.
Kapazität $C = Q/U$ mit $U = \phi(z = d) - \phi(z = 0)$. Mit $\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi = -\partial_z\phi(z)\vec{e}_z \Rightarrow$

$$
\phi(d)-\phi(0) = -\int_0^d E_z(z)\mathrm{d}z = \int_0^d \frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0+\Delta\epsilon\frac{z}{d}}\mathrm{d}z = \frac{4Q}{R_0^2}\frac{d}{\Delta\epsilon}\ln\left(\epsilon_0+\Delta\epsilon\frac{z}{d}\right)\Big|_0^d = \frac{4Q}{R_0^2}\frac{d}{\Delta\epsilon}\ln\left(\frac{\epsilon_0+\Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right)
$$

$$
C = \frac{Q}{U} = \frac{R_0^2}{4d}\frac{\Delta\epsilon}{\ln\left(1+\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right)}
$$