**Lösungen zu Blatt 6** **07.05.2010**

## 6.1 Permanent magnetisierter Zylinder

Ein unendlich langer *permanent* magnetisierter Zylinder mit dem Radius $a$ und der $z$-Achse als Zylinderachse besitzt die Magnetisierung

$$\vec{M}(r,\varphi,z) = M_0 \frac{r^2}{a^2}\vec{e}_\varphi, \qquad M_0 > 0$$

($r$, $\varphi$, $z$ Zylinderkoordinaten).
a) Berechne die Magnetisierungs-Volumsstromdichte $\vec{j}_M$ im Inneren des Zylinders und die Magnetisierungs-Flächenstromdichte $\vec{k}_M$ auf dem Zylindermantel sowie den in $z$-Richtung fließenden Gesamtstrom.
Im Inneren $r < a$ gilt: $\vec{j}_M(\vec{r}) = c\,\mathrm{rot}\vec{M}(\vec{r}) = c\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rM_\varphi(r)\right)\vec{e}_z$ mit $M_\varphi(r) = M_0\frac{r^2}{a^2}$. $\Rightarrow \vec{j}_M(\vec{r}) = 3M_0c\frac{r}{a^2}\vec{e}_z$.

Am Rand $r = a$ gilt: $\vec{k}_M = c\,\mathrm{Rot}\vec{M} = c\left(\vec{n}\times\underbrace{\vec{M}_a}_{\vec{0}}\right) - c\left(\underbrace{\vec{n}}_{\vec{e}_r}\times\underbrace{\vec{M}_i}_{M_0\vec{e}_\varphi}\right) = -M_0c\vec{e}_z$

Gesamtstrom: $2\pi\int_0^a \mathrm{d}r\, r 3M_0c\frac{r}{a^2} + 2\pi a(-M_0c) = 2\pi M_0ca - 2\pi M_0ca = 0$.
b) Berechne im gesamten Raum das vom magnetisierten Zylinder verursachte $\vec{B}$-Feld. Gib ferner für den gesamten Raum das zugehörige $\vec{H}$-Feld an.
<u>Lösungsweg 1</u>: Aus Symmetriegründen gilt $\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r)\vec{e}_\varphi$.
Integrale Form des Oerstedschen Gesetzes: $\oint_{\partial F}\vec{B}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_F \vec{j}_M(\vec{r}\,')\cdot\mathrm{d}\vec{f}\,'$.

$$2\pi rB_\varphi(r) = \begin{cases}\frac{1}{c}3M_0c\frac{r}{a^2}2\pi\int_0^r \mathrm{d}r'\,r'^2 & r < a\\ 0 & r > a\end{cases} \qquad B_\varphi(r) = \begin{cases}4\pi M_0\frac{r^2}{a^2} & r < a\\ 0 & r > a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases}4\pi\vec{M}(\vec{r}) - 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \vec{0}\\ \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}\end{cases} \qquad \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ im ganzen Raum.}$$

<u>Lösungsweg 2</u>: $\vec{H}(\vec{r}) = 0$ kann man sich auch folgendermaßen überlegen:
Für $r < a$: $\mathrm{div}\vec{H} = \underbrace{\mathrm{div}\vec{B}}_{0} - 4\pi\underbrace{\mathrm{div}\vec{M}}_{0} = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \vec{0}$.
Für $r > a$: $\mathrm{div}\vec{H} = \mathrm{div}\vec{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \vec{0}$. (auch keine Quellen / Wirbel im Unendlichen)
Für $r = a$: $\mathrm{Div}\vec{H} = \mathrm{Div}\vec{B} - 4\pi\mathrm{Div}\vec{M} = 0, \qquad \mathrm{Rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{k} = \vec{0}$.
Daher muss gelten $\vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{B}(\vec{r}) = 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases}4\pi M_0\frac{r^2}{a^2}\vec{e}_\varphi & r < a\\ \vec{0} & r > a\end{cases}$

## 6.2 Gerader Leiter vor magnetischem Raum

Der Halbraum $x \le 0$ sei von einer para- oder diamagnetischen Substanz mit der Permeabilität $\mu$ erfüllt. Vor diesem Halbraum befinde sich im Abstand $d$ in der $zx$-Ebene ein zur $z$-Achse paralleler dünner gerader Leiter $\mathcal{L}$, welcher von einem zeitlich konstanten Strom $I$ durchflossen wird.
a) Schreibe für die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ die für $x < 0$ bzw. $x > 0$ geltenden Feldgleichungen an. Welche Stetigkeitsbedingungen muss $\vec{B}$ für $x = 0$ erfüllen? Welche asymptotische Bedingung muss $\vec{B}$ für $x \to \infty$ erfüllen?
Für $x > 0$ muss gelten: $\mathrm{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$ mit $\vec{j}(\vec{r}) = I\delta(x-d)\delta(y)\vec{e}_z$.
Für $x < 0$ muss gelten: $\mathrm{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r})$
Stetigkeitsbedingungen für $x = 0$: $\mathrm{Div}\vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad \mathrm{Rot}\vec{H}(\vec{r}) = 0$.

Asymptotische Bedingung: $\vec{B} \to \vec{0}$ für $x \to \infty$.
b) Verifiziere, dass die Feldgleichungen, die Stetigkeitsbedingungen und die asymptotischen Bedingungen von (a) durch folgende Ansätze erfüllt werden können („Bildstrommethode"):
Für die Berechnung des Magnetfeldes für $x > 0$ wird die permeable Substanz durch einen fiktiven dünnen geraden Leiter $\mathcal{L}'$ ersetzt („Bild von $\mathcal{L}$"), welcher zu $\mathcal{L}$ bezüglich der Ebene $x = 0$ spiegelbildlich liegt und von einem Strom $I'$ durchflossen wird.
Für die Berechnung des Magnetfeldes für $x < 0$ werden die permeable Substanz bei $x \leq 0$ und der Strom $I$ im Leiter $\mathcal{L}$ durch einen fiktiven Strom $I''$ in $\mathcal{L}$ ersetzt. Berechne die Ströme $I'$, $I''$.
Ansatz für $x > 0$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r}), \qquad \text{mit} \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{2I}{c} \frac{1}{(x-d)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{2I'}{c} \frac{1}{(x+d)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x+d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ansatz für $x < 0$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{2I''}{c} \frac{1}{(x-d)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Feldgleichungen für $x > 0$ erfüllt, da $\vec{B}_1(\vec{r})$ eine Partikulärlösung in dem Halbraum ist, und $\vec{B}_2(\vec{r})$ dort die zugehörigen homogenen Feldgleichungen erfüllt ($\text{div}\vec{B}_2(\vec{r}) = 0$, $\text{rot}\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I' \delta(x+d)\delta(y)\vec{e}_z = 0$). Feldgleichungen sind auch für $x < 0$ durch $\vec{B}_3(\vec{r})$ erfüllt (analog wie für $\vec{B}_2(\vec{r})$). Asymptotische Bedingung gilt auch für $\vec{B}_1(\vec{r})$, $\vec{B}_2(\vec{r})$ und $\vec{B}_3(\vec{r})$.
Stetigkeitsbedingung: $\text{Div}\vec{B}(\vec{r}) = 0 \;\; \Rightarrow B_{1,x}(0,y,z) + B_{2,x}(0,y,z) = B_{3,x}(0,y,z)$. $\Rightarrow \frac{2I}{c} \frac{-y}{d^2+y^2} + \frac{2I'}{c} \frac{-y}{d^2+y^2} = \frac{2I''}{c} \frac{-y}{d^2+y^2} \Rightarrow I + I' = I''$
$\text{Rot}\vec{H}(\vec{r}) = 0 \;\; \Rightarrow \vec{e}_x \times (\vec{H}_{x>0} - \vec{H}_{x<0}) = 0 = \vec{B}_{1,y}(0,y,z) + \vec{B}_{2,y}(0,y,z) - \frac{1}{\mu}\vec{B}_{3,y}(0,y,z) \;\; \Rightarrow \frac{2I}{c} \frac{-d}{d^2+y^2} + \frac{2I'}{c} \frac{+d}{d^2+y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{2I''}{c} \frac{-d}{d^2+y^2} \Rightarrow I - I' = \frac{1}{\mu} I''$

$$\Rightarrow I' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I, \qquad I'' = \frac{2\mu}{\mu + 1} I$$

c) Berechne für $x < 0$ die Magnetisierung $\vec{M}$ und das $\vec{H}$-Feld. Berechne ferner für $x < 0$ die Magnetisierungs-Volumsstromdichte $\vec{j}_M$ sowie die Magnetisierungs-Flächenstromdichte $\vec{k}_M$ auf der Fläche $x = 0$ und die zugehörigen in $z$-Richtung fließenden Gesamtströme $I_{M,\text{Raum}}$ bzw. $I_{M,\text{Oberfl.}}$.
Für $x < 0$ gilt: $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi\vec{M}(\vec{r}) \;\; \Rightarrow \vec{M}(\vec{r}) = \frac{\mu-1}{4\pi\mu}\vec{B}(\vec{r})$. Also

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{2}{\mu+1} \frac{2I}{c} \frac{1}{(x-d)^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{2I}{c} \frac{1}{(x-d)^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{j}_M$ gilt: $\;\; \vec{j}_M = c\,\text{rot}\vec{M}(\vec{r}) = \frac{c}{4\pi}\frac{\mu-1}{\mu}\text{rot}\vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$, $I_{M,\text{Raum}} = 0$.
Für $\vec{k}_M$ gilt: $\vec{k}_M = c\,\text{Rot}\vec{M}(\vec{r}) = c\vec{e}_x \times \left(\vec{M}_{x>0} - \vec{M}_{x<0}\right) = \vec{0} - c\frac{1}{2\pi}\frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{2I}{c}\frac{-d}{d^2+y^2}\vec{e}_z = \frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{I}{\pi}\frac{d}{d^2+y^2}\vec{e}_z \equiv k_M(y)\vec{e}_z$
Oberflächenstrom: $I_{M,\text{Oberfl.}} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{d}y k_M(y) = \frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{I}{\pi} d \int_{-\infty}^{\infty} \text{d}y \frac{1}{d^2+y^2} = \frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{I}{\pi} d \frac{1}{d} \arctan\frac{y}{d}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu-1}{\mu+1} I$.

## 6.3 Feld zwischen unendlich langen Leitern mit sichelförmigem Querschnitt

Zwei unendlich lange Leiter $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ besitzen sichelförmige Querschnitte und räumliche Lage wie in der Abbildung dargestellt. Der Leiter $\mathcal{L}_1$ wird in positive $z$-Richtung, der Leiter $\mathcal{L}_2$ in negative $z$-Richtung von einem über den Querschnitt gleichmäßig verteilten elektrischen Strom der Dichte $j_0$ durchflossen. Berechne die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ in dem zwischen den Leitern eingeschlossenen Raumbereich.
Im Inneren eines Zylinders gilt: $\oint_{\partial F} \vec{B}(\vec{r})\text{d}\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_F \vec{j}(\vec{r})\text{d}^2\vec{f}$. Aus Symmetriegründen: $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$. $2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c} j_0 r^2 \pi \;\; \Rightarrow B(r) = \frac{2\pi}{c} j_0 r$, $\;\; \vec{B} = \frac{2\pi}{c} j_0(-y, x, 0)$.
Superposition von zwei Zylindern mit Strömen in entgegengesetzter Richtung: $\vec{B}(x,y) = \frac{2\pi}{c} j_0(-y, x-a, 0) - \frac{2\pi}{c} j_0(-y, x+a, 0) = -\frac{4\pi}{c} a j_0 \vec{e}_y$.