Lösungen zu Blatt 7 **21.05.2010**

7.1 Toroidale Spule mit rechteckigem Querschnitt

Eine sehr fein und gleichmäßig gewickelte Spule mit N Windungen sei um einen in sich ringförmig geschlossenen Spulenkörper gewickelt. Dieser Spulenkörper ergebe sich durch Rotation eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b um die z-Achse mit Innenabstand R_0 (siehe Skizze). Durch die Spule werde ein Strom I geschickt. Welches Magnetfeld ergibt sich im Inneren und Äußeren dieser Spule? Berechne außerdem den magnetischen Fluss durch die Spule und ihre Selbstinduktion. Hat für $b > a$ die gegebene Spule die größere Selbstinduktion, oder die Spule mit a und b vertauscht (sonstige Parameter gleich)?
Das Magnetfeld hat nur eine $\vec{e}_\varphi$-Komponente aufgrund der Spiegelsymmetrie, wie man folgendermaßen sieht: Z.B. für $\varphi = 0$ in der $y = 0$ Ebene addieren sich an einem Ort $\vec{r} = (x, 0, z)$ die Beiträge vom Ort $\vec{r}\,' = (x', y', z')$ mit Strom in Richtung $\vec{j}(\vec{r}\,') = (j_x, j_y, j_z)$ und vom an $y = 0$ gespiegelten Ort $\vec{r}\,'' = (x', -y', z')$ mit $\vec{j}(j_x, -j_y, j_z)$ folgendermaßen auf $\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,') + \vec{j}(\vec{r}\,'') \times (\vec{r} - \vec{r}\,'') = 2\left(j_z(x - x') - j_x(z - z')\right)\vec{e}_y$, sodass die $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_z$ Komponenten verschwinden. Die Spiegelsymmetrie ist (annähernd) für eine sehr fein gewickelte Spule erfüllt.
Für das Oerstedsche Gesetz nimmt man eine Kreisfläche mit Radius r. Innerhalb der Spule: Gesamtstrom NI. Außerhalb der Spule: Gesamtstrom 0. Außen: $B_\varphi = 0$. Innen:

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{j} \quad \rightarrow \quad 2\pi r B_\varphi = \frac{4\pi}{c}(-I)N \quad \rightarrow \quad B_\varphi = -\frac{2}{c}\frac{IN}{r}$$

Fluss für eine Windung:

$$\Phi_1 = \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{B} = \int_0^b \mathrm{d}z \int_{R_0}^{R_0+a} \mathrm{d}y \frac{2IN}{cy} = \frac{2INb}{c} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Selbstinduktion für Gesamtfluss $\Phi_N = N\Phi_1$:

$$L = \frac{1}{c}\Phi_N \frac{1}{I} = \frac{2N^2 b}{c^2} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Abschätzung: $L > L(a \leftrightarrow b) \quad \rightarrow \quad b \ln \frac{R_0+a}{R_0} > a \ln \frac{R_0+b}{R_0}$, mit Substitution $b = R_0(\exp(\tilde{b}) - 1) > 0$, $a = R_0(\exp(\tilde{a}) - 1) > 0$ ($b > a \Leftrightarrow \tilde{b} > \tilde{a}$) verschwinden Logarithmen: $R_0(\exp(\tilde{b}) - 1)\tilde{a} > R_0(\exp(\tilde{a}) - 1)\tilde{b} \rightarrow \frac{\exp(\tilde{b})-1}{\tilde{b}} > \frac{\exp(\tilde{a})-1}{\tilde{a}}$, Taylor-Entwicklung $1 + \frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\tilde{b}^2}{3!} + ... > 1 + \frac{\tilde{a}}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{3!} + ...$ ist erfüllt für $\tilde{b} > \tilde{a}$ und somit $b > a$. D.h. die ursprüngliche Orientierung hat die größere Selbstinduktion.

7.2 Magnetische Elektronenlinse

Eine einfache Elektronenlinse bestehe aus einem kreisförmigen Leiter mit Radius a durch den ein Strom der Stärke I fließe (der Leiter liege in der xy-Ebene, das Zentrum liege im Ursprung, siehe Skizze).
a) Zeige mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes, dass das Magnetfeld in der Nähe der z-Achse (also für $x^2 + y^2 \ll a^2$) in folgender Weise approximiert werden kann:

$$\vec{B}(x, y, z) \approx \frac{2\pi}{c} \frac{Ia^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Wähle $\vec{r}\,' = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$, $\mathrm{d}\vec{r}\,' = (-a\sin\varphi, a\cos\varphi, 0)\mathrm{d}\varphi$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

$$\vec{B}(\vec{r}) \quad = \quad \frac{1}{c} \int \frac{I\,\mathrm{d}\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{3/2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{c} I \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - a\cos\varphi \\ y - a\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{\left((x-a\cos\varphi)^2 + (y-a\sin\varphi)^2 + z^2\right)^{3/2}} \\
&\approx \frac{1}{c} I \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} az\cos\varphi \\ az\sin\varphi \\ -ay\sin\varphi - ax\cos\varphi + a^2 \end{pmatrix} \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{c} \frac{Ia^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \equiv B_z \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Die Abschätzung im Nenner kann auch genauer aufgeschrieben werden:

$$
\frac{1}{(s^2+a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}} \left[1 + O\left(\frac{s^2}{a^2+z^2}\right)\right]
$$

mit $s^2 \equiv x^2 - 2xa\cos\varphi + y^2 - 2ya\sin\varphi \ll a^2 \le a^2 + z^2$. Der Vernachlässigte Term ist also von Ordnung $O(s^2/(a^2+z^2))$.

b) Wie groß muss der Strom I gewählt werden, damit ein Elektron mit Ladung $q = -e$, Masse m und Geschwindigkeitskomponente v_z nach Durchfliegen der Linse wie in der Abbildung dargestellt die Richtung der Transversalkomponente umkehrt (für $l \gg a \gg b$)?

Anleitung: Löse die Bewegungsgleichung mit Hilfe folgenden Ansatzes für die Geschwindigkeit des Elektrons: $\vec{v}(t) = (v_\perp(t)\cos\varphi(t), v_\perp(t)\sin\varphi(t), v_z(t))$, und zeige, dass die Transversalkomponente $v_\perp$ und die Longitudinalkomponente v_z ihren Betrag nicht ändern. Zeige, dass dann die Winkeländerung beim Durchtritt durch die Linse $\Delta\varphi = -4\pi Iq/(mc^2 v_z)$ beträgt. Vergewissere dich schließlich durch eine grobe Abschätzung, dass der Umkehrradius in der Transversalebene viel kleiner als b ist, für $l \gg a \gg b$. Der Interaktionsbereich kann hierfür einfach von der Größenordnung $\sim a$ angenommen werden.

Für $\vec{v} = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ und $\vec{B} = B_z(z)\vec{e}_z$ gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\vec{F}}{m} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \frac{q}{mc}\vec{v} \times \vec{B} = \frac{q}{mc} \begin{pmatrix} v_y(t)B_z(t) \\ -v_x(t)B_z(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} \dot{v}_\perp(t)\cos\varphi(t) - v_\perp(t)\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t) \\ \dot{v}_\perp(t)\sin\varphi(t) + v_\perp(t)\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \frac{q}{mc} \begin{pmatrix} v_\perp(t)\sin\varphi(t)B_z(t) \\ -v_\perp(t)\cos\varphi(t)B_z(t) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aus Koeffizientenvergleich erhält man $\dot{v}_\perp(t) = \dot{v}_z(t) = 0$, also $v_\perp(t) = v_\perp$, $v_z(t) = v_z$, und $z = v_z t$. Ferner folgt

$$
\dot{\varphi}(t) = -\frac{q}{mc}B_z(t) = -\frac{2\pi q}{mc^2} \frac{Ia^2}{\left(a^2 + (v_z t)^2\right)^{3/2}}
$$

Integration liefert

$$
\Delta\varphi = \int_{-l/v_z}^{l/v_z} \dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t = -\frac{2\pi qI}{mc^2} \int_{-l/v_z}^{l/v_z} \frac{a^2}{\left(a^2+(v_z t)^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}t = -\frac{2\pi qI}{mc^2}\frac{2}{v_z}\frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}} \approx -\frac{2\pi qI}{mc^2}\frac{2}{v_z}.
$$

Umkehren in Transversalrichtung: $\Delta\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm(2n+1)\pi, \ldots\ n \in \mathbb{N}$, also

$$
I = -\frac{\Delta\varphi mc^2 v_z}{4\pi q} = -\frac{\pm(2n+1)mc^2 v_z}{4q}, \quad n \in \mathbb{N}
$$

Abschätzung: Interaktionsbereich von Größe $\sim a$. Verweildauer im Interaktionsbereich $t \sim a/v_z$. Transversalgeschwindigkeit von Größe $v_\perp \sim v_z b/l$. Wegen Drehung um 180° ist Radius r etwa so groß wie insgesamt in transversaler Richtung zurückgelegte Strecke x im Interaktionsbereich: $r \sim x \sim v_\perp t \sim v_z ba/(lv_z) \sim ba/l$ $\Rightarrow\ r \sim x \ll b$ wegen $a/l \ll 1$.

7.3 Verzögerungsplatte

Eine in z-Richtung propagierende ebene Welle trifft senkrecht auf eine Verzögerungsplatte, die in x- und y-Richtung verschiedene Brechungsindizes n_x und n_y aufweist. Welche Dicke d muss die Verzögerungsplatte haben, damit linear polarisiertes Licht mit Polarisationsrichtung um $+45°$ gegenüber der x-Achse geneigt (also eine Superposition phasengleicher, gleich starker, in x- und y-Richtung linear polarisierter Wellen) als zirkular polarisiertes Licht austritt? Wie ist das austretende Licht polarisiert, wenn eine doppelt so dicke Verzögerungsplatte verwendet wird?

$+45°$ linear polarisiertes Licht als Superposition von 2 linear polarisierten Wellen gleicher Phase schreiben, mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$:
$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x\vec{e}_x \cos(k_1 z - \omega t + \varphi) + E_y\vec{e}_y \cos(k_2 z - \omega t + \varphi)$
Vor dem Eintritt $z < 0$ gilt $k_1 = k_2$. Nach dem Eintritt $0 \leq z \leq d$: Brechungsindizes: $k_1 c/\omega = n_x$, $k_2 c/\omega = n_y$.
Zirkular polarisiert: Eine Komponente nach Strecke $z = d$ um $\pm\pi/2$ verschoben. Wenn y-Komponente um $+\pi/2$ $(-\pi/2)$ verschoben wird, dann ist $\cos(\alpha \pm \pi/2) = \mp\sin(\alpha)$, also eine linkszirkular (rechtszirkular) polarisierte Welle.
$n_x\omega d/c - \omega t + \varphi = n_y\omega d/c - \omega t + \varphi \pm \pi/2 \quad \Rightarrow \quad (n_x - n_y)\,\omega d/c = \pm\pi/2$. Mit $\omega/c = 2\pi/\lambda$ folgt

$$d = \pm\frac{\pi}{2}\frac{c}{\omega}\frac{1}{n_x - n_y} = \pm\frac{\lambda}{4}\frac{1}{n_x - n_y}$$

Bei doppelt so dicker Verzögerungsplatte erhält eine Komponente die umgekehrte Phase $\cos(\alpha + 2\pi/2) = -\cos(\alpha)$. Das Ergebnis ist eine um -45° gegenüber der x-Achse geneigte linear polarisierte Welle.

7.4 Zusatzaufgabe: Häufige Fehler beim 1. Test

Korrigiere folgende Fehler, die häufig beim Rechenteil des 1. Tests vorkamen:

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\,\mathrm{d}z \\ y\,\mathrm{d}z \\ y\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x\,\mathrm{d}z \\ -y\,\mathrm{d}z \\ y\,\mathrm{d}y \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}}\mathrm{d}z' = \left| \begin{array}{c} z - z' = t \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}z' \end{array} \right| = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t \rightarrow -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{x}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t$

e) Zylinderkoordinaten: $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}$

f) Ladung: $+q$. Influenzierte Gesamtladung für $a \gg b$: $+q \rightarrow -q$.

g) Linienintegral um ein Rechteck für eine Funktion f : $\int_{y=r}^{r+a}\int_{z=0}^{b} f(0, y, z)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$
$\rightarrow \int_0^b f(0, r, z)\mathrm{d}z + \int_r^{r+a} f(0, y, b)\mathrm{d}y + \int_b^0 f(0, r+a, z)\mathrm{d}z + \int_{r+a}^{r} f(0, y, 0)\mathrm{d}y$ (statt Flächenintegral)

h) Linienintegral von $(0, r+a, b)$ bis $(0, r+a, 0)$ für f: $\int_b^0 f(0, r+a, z)(-\mathrm{d}z)$
$\rightarrow$Entweder $\int_b^0 f(0, r+a, z)\mathrm{d}z$ oder $\int_0^b f(0, r+a, z)(-\mathrm{d}z)$ aber nicht doppelt.

i) Linienintegral von $(0, r, b)$ bis $(0, r+a, b)$ für f: $\int_r^{r+a} f(0, r+y, b)\mathrm{d}y$
$\rightarrow$Entweder $\int_r^{r+a} f(0, y, b)\mathrm{d}y$ oder $\int_0^a f(0, r+y, b)\mathrm{d}y$ aber nicht doppelt.

j) $\int \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{B}$ von $(0, r, 0)$ bis $(0, r, a)$ integriert: $\int_0^a \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \mathrm{d}z$

$\rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$, also $\int_0^a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

k) Abstand zum Punkt $(a, b, 0)$: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}$.