Lösungen zu Blatt 8 **28.05.2010**

8.1 Strahlungsdruck einer inhomogenen ebenen Welle

Eine elektromagnetische Welle treffe senkrecht auf ein Medium mit konstanter Permittivität ε, konstanter Permeabilität μ und konstanter Leitfähigkeit σ.
a) Zeige, dass der Reflexionskoeffizient geschrieben werden kann als

$$R = \frac{(n-\mu)^2+\kappa^2}{(n+\mu)^2+\kappa^2}.$$

Hinweis: Die einfallende Welle kann als linear polarisiert angenommen werden, ohne die Allgemeinheit der Ergebnisse einzuschränken. Beachte, dass die Fresnelschen Formeln in der Vorlesung nur für $\mu = 1$ und $\sigma = 0$ hergeleitet wurden.
Die Herleitung aus der Vorlesung muss für allgemeines μ und σ wiederholt werden. Allerdings kann man sich auf den Fall beschränken $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$. Wir nehmen eine linear polarisierte Welle an $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$, $\vec{H}_0 = H_0\vec{e}_y$. Für die reflektierte Welle gilt $\vec{k}'' = -k''\vec{e}_z$, und um das Rechtssystem zu erhalten $\vec{E}''_0 = E''_0\vec{e}_x$ und $\vec{H}''_0 = -H''_0\vec{e}_y$. Aus $\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}_0$ und $\vec{k}\times\vec{H}_0 = -\frac{\omega}{c}\eta\vec{E}_0$ folgt $k = k'' = \omega/c$ und $k' = \sqrt{\mu\eta}\,\omega/c$. Aus $\vec{k}'\times\vec{E}'_0 = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}'_0$ folgt $H'_0 = E'_0 k'\frac{c}{\omega}\frac{1}{\mu} = E'_0\sqrt{\eta/\mu}$, im Vakuum gilt $H_0 = E_0$ und $H''_0 = E''_0$. Anschlussbedingungen $\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{n}\times\left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right) = 0$ und $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0$ liefern $E_0 + E''_0 = E'_0$ und $H_0 - H''_0 = H'_0$ oder $E_0 - E''_0 = E'_0\sqrt{\eta/\mu}$. Auflösen ergibt $E''_0 = E_0(1-\sqrt{\eta/\mu})/(1+\sqrt{\eta/\mu})$. Mit $\sqrt{\eta} = (n+i\kappa)/\sqrt{\mu}$ folgt $E''_0 = E_0(\mu-n-i\kappa)/(\mu+n+i\kappa)$. Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{|E''_0|^2}{|E_0|^2} = \frac{(\mu-n-i\kappa)(\mu-n+i\kappa)}{(\mu+n+i\kappa)(\mu+n-i\kappa)} = \frac{(n-\mu)^2+\kappa^2}{(n+\mu)^2+\kappa^2}.$$

b) Wie schaut die Welle im leitenden, dielektrischen Medium im niederfrequenten Fall aus ($\mu = 1$, $\omega \ll 4\pi\sigma/\varepsilon$)? Berechne den Strahlungsdruck P (Zeitmittel über eine Periode) dieser Welle auf das Medium, dessen Dicke $d \gg c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ beträgt.
Niederfrequenter Fall:

$$n + i\kappa = \sqrt{\mu\eta} = \sqrt{\mu\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)} \approx \sqrt{i\frac{4\pi\sigma}{\omega}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}, \qquad \Rightarrow \quad n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}$$

Welle mit Wellenvektor $k' = (n+i\kappa)\omega/c$ hat einen exponentiell abfallenden Anteil:

$$\vec{E}'(\vec{r},t) = \frac{1}{2}E'_0\vec{e}_x e^{i(\vec{k}'\vec{x}-\omega t)} + c.c. = \frac{1}{2}E'_0\vec{e}_x e^{-\kappa\frac{\omega}{c}\vec{e}_z\vec{x}} e^{i(n\frac{\omega}{c}\vec{e}_z\vec{x}-\omega t)} + c.c..$$

Für $d \gg c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ folgt $\kappa\frac{\omega}{c}d = d\sqrt{2\pi\sigma\omega}/c \gg 1$ und die Welle ist fast verschwunden. Um den Strahlungsdruck auszurechnen kann man daher ein Volumen um das gesamte Medium annehmen, wobei aber nur die „Vorderseite“ (die im Vakuum knapp vor dem Medium liegt) beiträgt. Vom Maxwellschen Spannungstensor trägt nur $w_{em}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ bei, also Beiträge der einlaufenden und der reflektierten Welle. Der Strahlungsdruck beträgt somit $P = F/A = \frac{1}{4\pi}\vec{E}^2(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}|E_0|^2(1+R)$ (Faktor $\frac{1}{2}$ von Mittelung über eine Periode) mit

$$R = \frac{(n-1)^2+n^2}{(n+1)^2+n^2}.$$

Gegenüberliegende Beiträge auf den „Seitenteilen“ der Oberfläche heben sich gegenseitig auf, da der Spannungstensor aufgrund der Translationssymmetrie gleich ist, aber $\mathrm{d}^2\vec{f}$ das Vorzeichen ändert. Es gibt zwar auch einen zeitabhängigen Beitrag vom Volumen, aber für jeden einzelnen Punkt im Volumen verschwindet die zeitlich gemittelte Ableitung des Poynting-Vektors, daher trägt das Volumen nicht bei.

8.2 Antireflexbeschichtung

Auf ein dielektrisches Medium mit Dielektrizitätskonstante ε_3 wird eine dünne Schicht der Dicke d eines Mediums mit Dielektrizitätskonstante ε_2 aufgedampft. Eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle falle senkrecht auf dieses Medium aus einem Bereich mit Dielektrizitätskonstante ε_1 ein (siehe Skizze).
a) Zeige, dass das Verhältnis der Amplituden von auslaufender (E_1^-) und einlaufender (E_1^+) Welle im Bereich 1 gegeben ist durch

$$\frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} e^{2ik_2 d}}{1 + \alpha_{12}\alpha_{23} e^{2ik_2 d}}, \qquad \text{mit}\, \alpha_{jk} := \frac{n_j - n_k}{n_j + n_k}.$$

Hinweis: Die einfallende Welle kann als linear polarisiert angenommen werden. Setze im Bereich 1 und 2 ein- und auslaufende ebene Wellen an (E_1^+, E_1^-, E_2^+, E_2^-; $\pm k_1$, $\pm k_2$), und im Bereich 3 eine auslaufende ebene Welle (E_3^+; $+k_3$). Zeige, dass die Anschlussbedingungen bei $z = 0$ und $z = d$ zu der angegebenen Formel führen.
Ansatz für $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$ wegen $\mu = 1$: $\vec{n}$, $\vec{E}$, und $\vec{B}$ bilden jeweils orthogonales Dreibein.

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1(z,t) &= \vec{e}_x \left(E_1^+ e^{i(k_1 z - \omega t)} + E_1^- e^{i(-k_1 z - \omega t)} \right) && (1)\\
\vec{B}_1(z,t) &= \vec{e}_y \left(n_1 E_1^+ e^{i(k_1 z - \omega t)} - n_1 E_1^- e^{i(-k_1 z - \omega t)} \right) && (2)\\
\vec{E}_2(z,t) &= \vec{e}_x \left(E_2^+ e^{i(k_2 z - \omega t)} + E_2^- e^{i(-k_2 z - \omega t)} \right) && (3)\\
\vec{B}_2(z,t) &= \vec{e}_y \left(n_2 E_2^+ e^{i(k_2 z - \omega t)} - n_2 E_2^- e^{i(-k_2 z - \omega t)} \right) && (4)\\
\vec{E}_3(z,t) &= \vec{e}_x E_3^+ e^{i(k_3 z - \omega t)} && (5)\\
\vec{B}_3(z,t) &= \vec{e}_y n_3 E_3^+ e^{i(k_3 z - \omega t)} && (6)
\end{aligned}$$

Anschlussbedingungen: $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$ führt zu Stetigkeit von E_x. $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0 = \mathrm{Rot}B$ wegen $\mu = 1$ führt zu Stetigkeit von B_y. Bei $z = 0$ und $z = d$ erhält man

$$\begin{aligned}
E_1^+ + E_1^- &= E_2^+ + E_2^- && (7)\\
n_1 \left(E_1^+ - E_1^- \right) &= n_2 \left(E_2^+ - E_2^- \right) && (8)\\
E_2^+ e^{ik_2 d} + E_2^- e^{-ik_2 d} &= E_3^+ e^{ik_3 d} && (9)\\
n_2 E_2^+ e^{ik_2 d} - n_2 E_2^- e^{-ik_2 d} &= n_3 E_3^+ e^{ik_3 d} && (10)
\end{aligned}$$

Aus $n_3 \times$(9) - (10) folgt

$$E_2^+ (n_3 + n_2) e^{ik_2 d} + E_2^- (n_3 - n_2) e^{-ik_2 d} = 0, \qquad E_2^- = E_2^+ \alpha_{23} e^{2ik_2 d}. \qquad (11)$$

Aus $n_1 \times$(7) $\pm$ (8) folgt

$$\begin{aligned}
2n_1 E_1^+ &= E_2^+ (n_1 + n_2) + E_2^- (n_1 - n_2) && (12)\\
2n_1 E_1^- &= E_2^+ (n_1 - n_2) + E_2^- (n_1 + n_2) && (13)
\end{aligned}$$

$$\frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{E_2^+ \alpha_{12} + E_2^-}{E_2^+ + E_2^- \alpha_{12}} = \frac{E_2^+ \alpha_{12} + E_2^+ \alpha_{23} e^{2ik_2 d}}{E_2^+ + E_2^+ \alpha_{23} e^{2ik_2 d} \alpha_{12}} = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} e^{2ik_2 d}}{1 + \alpha_{12}\alpha_{23} e^{2ik_2 d}} \qquad (14)$$

b) Wie lautet der Reflexionskoeffizient dieser Anordnung? Wie muss man die Dicke d und die Materialkonstante ε_2 der aufgedampften Schicht wählen, damit überhaupt kein Licht reflektiert wird?

$$R = \frac{|E_1^-|^2}{|E_1^+|^2} = \frac{\left|\alpha_{12} + \alpha_{23} e^{2ik_2 d}\right|^2}{|1 + \alpha_{23}\alpha_{12} e^{2ik_2 d}|^2} = \frac{\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{23} \cos 2k_2 d}{1 + \alpha_{12}^2 \alpha_{23}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{23} \cos 2k_2 d}.$$

Maxima und Minima von $R(d) : R'(d) = 0 \rightarrow \sin 2k_2 d = 0$. $d = m\pi/(2k_2) = m\lambda_2/4$ mit $m \in \mathbb{N}$.
Für $d = (2n-1)\lambda_2/4$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt $R = (\alpha_{12} - \alpha_{23})^2 / (1 - \alpha_{12}\alpha_{23})^2 =: R_u$.

Für $d = 2n\lambda_2/4$ folgt $R = (\alpha_{12} + \alpha_{23})^2 / (1 + \alpha_{12}\alpha_{23})^2 =: R_g$.
Fall 1: n_2 liegt zwischen n_1 und n_3: $n_1 < n_2 < n_3$ oder $n_1 > n_2 > n_3$: $\rightarrow$ $\mathrm{sign}\alpha_{12} = \mathrm{sign}\alpha_{23}$, $\alpha_{12}\alpha_{23} > 0$, $R_{\min} = R_u$, $R_{\max} = R_g$. $R_{\min}$ wird erreicht für $\alpha_{12} = \alpha_{23} \rightarrow n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$, bzw. $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$.
Fall 2: n_2 liegt nicht zwischen n_1 und n_3: $\mathrm{sign}\alpha_{12} = -\mathrm{sign}\alpha_{23}$, $\alpha_{12}\alpha_{23} < 0$, $R_{\min} = R_g$, $R_{\max} = R_u$. $R_{\min}$ wird erreicht für $\alpha_{12} = -\alpha_{23} \rightarrow n_1 = n_3$, bzw. $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$.
(Alternativ findet man die Lösungen auch durch Auflösen von $\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{23}\cos 2k_2 d = 0$ nach α_{12} $\Rightarrow$ $\alpha_{12} = -\alpha_{23}\cos 2k_2 d \pm \sqrt{(\alpha_{23}\cos 2k_2 d)^2 - \alpha_{23}^2}$. Der Ausdruck unter der Wurzel ist ≤ 0, daher gibt es Lösungen nur für $= 0$, also $\cos 2k_2 d = \pm 1$ und damit $\alpha_{12} = \mp\alpha_{23}$.)

8.3 Totalreflexion am Diamant

Der Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon}$ eines Dielektrikums besitze den Wert $n = 1 + \sqrt{2}$ (Dieser Wert liegt sehr nahe am Brechungsindex von Diamant: $n_{\mathrm{Diamant}} \approx 2.417$). Untersuche mit Hilfe der Fresnelschen Formeln, ob es möglich ist, durch Totalreflexion an einer Grenzfläche dieses Dielektrikums zum Vakuum aus linear polarisiertem monochromatischem Licht zirkular polarisiertes monochromatisches Licht herzustellen. Falls der gewünschte Effekt möglich ist: Mit welcher Schwingungsrichtung bezüglich der Einfallsebene und unter welchem Einfallswinkel muss man die Welle auf die Grenzfläche einfallen lassen? Ist dieser Effekt auch für Kronglas ($n \approx 1.5$) möglich?
Hinweis: Überzeuge dich, dass die Fresnelschen Formeln bei Totalreflexion aufgrund der imaginären Größe $\cos\alpha' = i\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}$ zu einer Phasenverschiebung $E_p''/E_p = \exp(-i\varphi_p)$ mit $\tan(\varphi_p/2) = n\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}/\cos\alpha$ führt (und ähnlich für E_s''/E_s). Zeige, dass die gesamte Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_p - \varphi_s$ mit Hilfe der Additionstheoreme für Tangens geschrieben werden kann als

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\alpha\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\sin^2\alpha}.$$

Phasenverschiebung folgt aus $\vec{E}''(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{E}_0''\exp(i\vec{k}''\cdot\vec{r} - i\omega'' t) + c.c.$ mit komplexem $\vec{E}_0''$. Die Fresnelschen Formeln für den reflektierten Strahl führen zu (mit $n' = 1$ für Vakuum)

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{\cos\alpha - n\cos\alpha'}{\cos\alpha + n\cos\alpha'} = \frac{r_p e^{-i\varphi_p/2}}{r_p e^{i\varphi_p/2}} = e^{-i\varphi_p}, \qquad \frac{E_s''}{E_s} = \frac{n\cos\alpha - \cos\alpha'}{n\cos\alpha + \cos\alpha'} = e^{-i\varphi_s}$$

mit $\tan(\varphi_p/2) = n\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}/\cos\alpha$ und $\tan(\varphi_s/2) = \sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}/(n\cos\alpha)$. Mit Additionstheorem folgt

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{\varphi_p - \varphi_s}{2} = \frac{\tan\frac{\varphi_p}{2} - \tan\frac{\varphi_s}{2}}{1 + \tan\frac{\varphi_p}{2}\tan\frac{\varphi_s}{2}} = \frac{\frac{n\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{\cos\alpha} - \frac{\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\cos\alpha}}{1 + \frac{n^2\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\sin^2\alpha}.$$

Wegen $|E_p''/E_p| = |E_s''/E_s| = 1$ muss die einfallende Welle $E_p = E_s$ haben (also zu 45° geneigt linear polarisiert sein). Ausserdem muss die Phasendifferenz $\varphi = \pm\pi/2$ betragen, also $\tan\frac{\varphi}{2} = \pm 1$. Dies führt auf eine quadratische Gleichung

$$\underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha}\left(n^2\sin^2\alpha - 1\right) = n^2\sin^4\alpha, \qquad \rightarrow \sin^2\alpha = \frac{n^2 + 1 \pm \sqrt{n^4 - 6n^2 + 1}}{4n^2}.$$

Für $n = 1 + \sqrt{2}$ verschwindet die Wurzel, und man erhält $\sin\alpha = \sqrt{1 - 1/\sqrt{2}}$, also $\alpha = 32,76°$. Dieser Winkel ist größer als der Grenzwinkel $\sin\alpha_g = 1/n$, also $\alpha_g = 24,47$, also funktioniert dieser Effekt für Diamant. Für kleinere n (insbesondere für $n \approx 1.5$) wird der Wurzelausdruck $\sqrt{n^4 - 6n^2 + 1}$ imaginär, und man erhält keine Lösung. Hier ist dieser Effekt also nicht möglich.