Lösungen zu Blatt 9 **04.06.2010**

9.1 Metallischer Spiegel

Der Halbraum $z < 0$ sei ladungsfreies Vakuum, der Halbraum $z \geq 0$ sei von einer ideal leitenden Substanz erfüllt. Aus dem Vakuum falle eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle auf die Grenzfläche $z = 0$ ein, deren elektrische Feldstärke durch

$$\vec{E}^+(z,t) = E_0^+ \cos(kz - \omega t)\vec{e}_x, \qquad E_0^+ \in \mathbb{R},\ k = \frac{\omega}{c}$$

gegeben ist.
a) Berechne das elektromagnetische Gesamt-Wellenfeld, das sich im Halbraum $z < 0$ ausbildet. Zeige über Additionstheoreme, dass sich eine stehende Welle bildet. (Hinweis: Im Inneren eines sogenannten „idealen Leiters“ ist das elektro-magnetische Feld stets null.)
Ansatz:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z,t) &= \left[E_0^+ \cos(kz - \omega t) + E_0^- \cos(-kz - \omega t)\right] \vec{e}_x, \\
\vec{B}(z,t) &= \vec{e}_z \times \vec{E}^+(z,t) + (-\vec{e}_z) \times \vec{E}^-(z,t) = \left[E_0^+ \cos(kz - \omega t) - E_0^- \cos(-kz - \omega t)\right] \vec{e}_y.
\end{aligned}$$

Ansatz erfüllt Feldgleichungen für $x < 0$. Randbedingungen: $\mathrm{Div}\vec{B} = 0 \Rightarrow B_z(0,t) = 0$ ist erfüllt. $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$ $\Rightarrow E_y(0,t) = 0$ ok, $E_x(0,t) = 0 \Rightarrow E_0^+ = -E_0^-$.

$$\begin{aligned}
\cos(kz - \omega t) - \cos(kz + \omega t) &= \cos(kz)\cos(\omega t) + \sin(kz)\sin(\omega t) - [\cos(kz)\cos(\omega t) - \sin(kz)\sin(\omega t)] \\
&= 2 \sin kz \sin \omega t \\
\cos(kz - \omega t) + \cos(kz + \omega t) &= 2 \cos kz \cos \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z,t) &= 2E_0^+ \sin kz \sin \omega t \vec{e}_x, \\
\vec{B}(z,t) &= 2E_0^+ \cos kz \cos \omega t \vec{e}_y.
\end{aligned}$$

b) Berechne die Flächenladungsdichte und die Flächenstromdichte auf der Oberfläche $z = 0$ des idealen Leiters.
$\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma \Rightarrow -\underbrace{E_z(0,t)}_{=0} = 4\pi\sigma \Rightarrow \sigma = 0.$
$\mathrm{Rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{k} \Rightarrow -\vec{e}_z \times \vec{B}(0,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{k}$ mit $\vec{B}(0,t) = 2E_0^+ \cos \omega t \vec{e}_y \Rightarrow \vec{k} = \frac{c}{2\pi} E_0^+ \cos \omega t \vec{e}_x$. (Wechselstrom in x-Richtung)

9.2 Brechung an einem Metamaterial

Gegeben sei ein Metamaterial mit $\varepsilon < 0$ und $\mu < 0$ (und $\sigma = 0$).
a) Zeige mit Hilfe der Maxwellgleichungen, dass in so einem Material der Wellenvektor $\vec{k}$, die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, und die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ ein linkshändiges Dreibein bilden und dass Poyntingvektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H}$ und Wellenvektor $\vec{k}$ in entgegengesetzte Richtungen zeigen. (Anmerkung: Da der Poyntingvektor die Richtung des Energieflusses bestimmt, hat so ein Metamaterial demnach eine negative Gruppengeschwindigkeit relativ zur Phasengeschwindigkeit).
Ansatz für monochromatische ebene Wellen:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + c.c., \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\vec{H}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + c.c., \qquad \vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r},t),\ \vec{B}(\vec{r},t) = \mu\vec{H}(\vec{r},t)$$

In Maxwellgleichungen eingesetzt:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}_0 \\ \mathrm{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\partial_t\vec{D} + \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{k}\times\vec{H}_0 = -\frac{\omega}{c}\eta\vec{E}_0, \qquad \eta = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\ \text{mit}\ \sigma = 0\end{aligned}$$

Für $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$ folgt aus jeder dieser Zeilen, dass $\vec{k}$, $\vec{E}$, und $\vec{H}$ ein linkshändiges Dreibein bilden (da sie mit $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ ein rechtshändiges Dreibein bilden). Da der Poyntingvektor aber als

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\right)$$

definiert ist (bzw. genauer gesagt in dieser Form aus der Impulsdichte $\vec{g}_{em}(\vec{r},t)$ des elektromagnetischen Feldes folgt), und dieser für ein rechtshändiges Dreibein in die selbe Richtung wie $\vec{k}$ zeigt, folgt daraus, dass er für das gegebene Metamaterial in die entgegengesetzte Richtung zeigt.
b) Zeige, dass aus den Anschlussbedingungen an der Grenzfläche zwischen einem normalen Material und einem Metamaterial folgt, dass die gebrochene Welle auf der selben Seite des Lots weiterläuft (siehe Skizze - die strichlierte Linie wäre der Verlauf der gebrochenen Welle in normalem Medium). In welche Richtung zeigt der $\vec{k}$-Vektor der gebrochenen Welle? Will man das Brechungsgesetz von Snellius in unveränderter Form beibehalten, folgt daraus, dass für dieses Metamaterial gilt: $n = -\sqrt{\mu\varepsilon} < 0$.
Anschlussbedingungen aus der Vorlesung, die zum Brechungsgesetz von Snellius führen:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} = e^{i\vec{k}''\cdot\vec{r}-i\omega'' t} = e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}-i\omega' t} \quad \text{bei } z = 0$$

Aus Gültigkeit $\forall t$ folgt $\omega = \omega'' = \omega'$. Aus $\forall x, y$ folgt $k_x = k''_x = k'_x$ und $k_y = k''_y = k'_y$. Beachte, dass dies noch <u>nicht</u> k_z festlegt! Bei „normalen“ Materialien hat k''_z das selbe Vorzeichen wie k_z (zeigt also in die selbe Richtung). Bei dem Metamaterial ist dies nicht mehr der Fall, wie man aus den Anschlussbedingungen feststellen kann:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}\vec{E} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \vec{e}_z\times\left(\vec{E}(\vec{r},t)+\vec{E}''(\vec{r},t)\right) = \vec{e}_z\times\left(\vec{E}'(\vec{r},t)\right), \\ \mathrm{Rot}\vec{H} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \vec{e}_z\times\left(\vec{H}(\vec{r},t)+\vec{H}''(\vec{r},t)\right) = \vec{e}_z\times\left(\vec{H}'(\vec{r},t)\right).\end{aligned}$$

Mit $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\frac{c}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)$ (und ähnlich für $\vec{H}'$ und $\vec{H}''$) erhält man

$$\vec{e}_z\times\left(\frac{1}{\mu}\frac{c}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{c}{\omega}\left(\vec{k}''\times\vec{E}''\right)\right) = \vec{e}_z\times\left(\frac{1}{\mu'}\frac{c}{\omega}\left(\vec{k}'\times\vec{E}'\right)\right).$$

Falls μ und μ' beide positiv sind, können $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ in die selbe Richtung (projiziert auf die z-Achse) schauen, um beide Anschlussbedingungen gleichzeitig zu erfüllen. Falls aber μ' negativ ist, muss der Vektor $\vec{k}'$ in entgegengesetzte Richtung schauen, um das Vorzeichen zu kompensieren, d.h. $k'_z < 0$ (denn die Richtung von $\vec{E}'_\perp$ wird ja schon durch die erste Anschlussbedingung festgelegt).
Die Dispersionsrelation $\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2}|n|$ für $\mu\sigma > 0$ folgt aus den Maxwellgleichungen, also $|k| = |n|\frac{\omega}{c}$, $|k'| = |n'|\frac{\omega}{c}$, $|k''| = |n''|\frac{\omega}{c}$. Mit $\omega = \omega'' = \omega'$ folgt $|\vec{k}|/|n| = |\vec{k}''|/|n| = |\vec{k}'|/|n'|$. Mit der ursprünglichen Bezeichnung der Winkel

$$\vec{k} = |k|\begin{pmatrix}\sin\alpha\\0\\\cos\alpha\end{pmatrix}, \qquad \vec{k}' = |k'|\begin{pmatrix}\sin\alpha'\\0\\\cos\alpha'\end{pmatrix}, \qquad \vec{k}'' = |k''|\begin{pmatrix}\sin\alpha''\\0\\-\cos\alpha''\end{pmatrix}$$

und $k_x = k'_x = k''_x$ würde mit $k' = kn'/n$ folgen: $n\sin\alpha = n'\sin\alpha'$. Allerdings zeigt $\vec{k}'$ im Metamaterial entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung der Welle:

$$\vec{k}' = k'\begin{pmatrix}\sin\alpha'\\0\\\cos\alpha'\end{pmatrix} \rightarrow k'\begin{pmatrix}\sin\alpha'\\0\\-\cos\alpha'\end{pmatrix} = (-k')\begin{pmatrix}-\sin\alpha'\\0\\\cos\alpha'\end{pmatrix}.$$

Damit folgt $n \sin\alpha = -|n'| \sin\alpha'$. Will man das ursprüngliche Brechungsgesetzt von Snellius beibehalten (bezogen auf die Ausbreitungsrichtung der Welle), so kann man definieren $n' \equiv -|n'| = -\sqrt{\varepsilon\mu}$ für Metamaterialien mit $\varepsilon < 0$ und $\mu < 0$.
Alternative Erklärung über Poyntingvektor S: An der Grenzfläche sind die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stetig $\rightarrow$ Normalkomponente des Poyntingvektors S_z ist an Grenzfläche stetig: $S_z + S_z'' = S_z'$.
z-Komponente lässt sich schreiben als $S_z = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right)_z = \frac{c}{4\pi}\frac{c}{\omega\mu}E^2 k_z$. Für zeitlich gemittelte Größen gilt $\langle S_z'\rangle = \langle S_z\rangle + \langle S_z''\rangle = \frac{c^2}{4\pi\omega\mu}\left(\langle E^2\rangle - \langle E''^2\rangle\right) k_z = \frac{c^2}{4\pi\omega\mu}\langle E^2\rangle (1-R)\, k_z$, wobei für den Reflexionskoeffizient R gilt: $0 \le R \le 1$, also $1 - R \ge 0$. Also $S_z' \sim k_z > 0$, daher $k_z' \sim -S_z < 0$. Rest der Überlegung wie oben.
Zu zeigen: $S_z + S_z'' = S_z'$:

$$\begin{aligned}
S_z' &= \frac{c}{4\pi}\left(E_x' H_y' - E_y' H_x'\right) \\
&= \frac{c}{4\pi}\left[\left(E_x + E_x''\right)\left(H_y + H_y''\right) - \left(E_y + E_y''\right)\left(H_x + H_x''\right)\right] \\
&= S_z + S_z'' + \frac{c}{4\pi}\left[E_x H_y'' + E_x'' H_y - E_y H_x'' - E_y'' H_x\right] \\
&= S_z + S_z''
\end{aligned}$$

Der Term der vorletzten Zeile verschwindet durch Einsetzen von

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu\omega}\begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{c}{\mu\omega}\begin{pmatrix} -k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y \end{pmatrix}, \quad \vec{H}'' = \frac{c}{\mu\omega}\begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ -k_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x'' \\ E_y'' \\ E_z'' \end{pmatrix} = \frac{c}{\mu\omega}\begin{pmatrix} k_z E_y'' \\ -k_z E_x'' - k_x E_z'' \\ k_x E_y'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E_x H_y'' + E_x'' H_y - E_y H_x'' - E_y'' H_x &= E_x\left(-k_z E_x'' - k_x E_z''\right) + E_x''\left(k_z E_x - k_x E_z\right) - E_y\left(k_z E_y''\right) - E_y''\left(-k_z E_y\right) \\
&= -E_x k_x E_z'' - E_x'' k_x E_z \\
&= -\left(-E_z k_z\right) E_z'' - \left(+E_z'' k_z\right) E_z = 0
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $\mathrm{div}\vec{E} = k_x E_x + k_z E_z = 0$ und $\mathrm{div}\vec{E}'' = k_x'' E_x'' + k_z'' E_z'' = k_x E_x'' - k_z E_z'' = 0$ verwendet.

9.3 Feld eines plötzlich gestoppten geladenen Teilchens

Ein ursprünglich gleichförmig bewegtes Teilchen wird bei $x = 0$, $t = 0$ plötzlich gestoppt (siehe Abbildung in den Vorlesungsfolien, Kapitel VI, letzte Seite). Der in der Abbildung eingezeichnete Pfad bildet Kreisbögen EA und FD mit Zentrum im ruhenden bzw. im sich bewegenden Teilchen (also der Position des Teilchens, an der es sich zum Zeitpunkt der Aufnahme befinden würde, wenn es nicht bei $t = 0$ gestoppt worden wäre), und verbindet diese Kreisbögen, indem es entlang $ABCD$ den Feldlinien folgt. Zeige dass zwischen den Polarwinkeln θ_0 und φ_0, die den Öffnungswinkel von gleichem elektrischen Fluss vor und nach der Schockwelle beschreiben, folgende Relation gelten muss:

$$\tan\varphi_0 = \gamma \tan\theta_0.$$

Hinweis: Zeige, dass das elektrische Feld eines gleichförmig bewegten Teilchens folgenden Betrag hat:

$$E = \frac{q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

mit Polarwinkel φ. Betrachte den Rotationskörper, der entsteht, wenn man die Kurve $EABCDF$ aus oben genannter Abbildung um die x-Achse rotiert, und wende auf diesen das Gaußsche Gesetz (Integralform des Coulombschen Gesetzes) an. Hinweis 2: $\cos\theta_0 = 1/\sqrt{1+\tan^2\theta_0}$.
In der Vorlesung ist angegeben

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{r_\tau^3 \kappa^3(\vec{r}, \tau)}\left(1-\beta^2\right)\vec{r}_\tau, \qquad r_\tau\kappa = \sqrt{r_t^2\left(1-\beta^2\right) + \left(\vec{r}_t\cdot\vec{\beta}\right)^2}.$$

Hier einsetzen $\vec{r}_t \cdot \vec{\beta} = \beta \cos\varphi$ liefert sofort $\kappa = \sqrt{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}$, und somit die angegebene Formel. Der Pfad $ABCD$ verläuft entlang der Feldlinien, also ist dort überall $\mathrm{d}^2\vec{f}\vec{E} = 0$. Im Volumen selber gibt es keine Ladungen. Also ist der Fluss durch die Rotationsfläche von EA gleich dem (negativen) Fluss durch die Rotationsfläche von FD - bzw. positiven Fluss, wenn man den Oberflächenvektor in beiden Fällen radial nach außen zeigen lässt. Fluss durch innere „Kappe“ EA:

$$\Phi_{EA} = 2\pi \int_0^{\theta_0} \frac{q}{r^2} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi q \int_0^{\theta_0} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi q \left(1-\cos\theta_0\right).$$

Für die äußere Kappe FD erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi_{FD} &= 2\pi \int_0^{\varphi_0} \frac{q}{r^2} \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}} r^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = 2\pi q \int_0^{\varphi_0} \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi q \left(\left. \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\varphi}} \right|_{\cos\varphi=\cos\varphi_0}^{\cos 0} \right) = 2\pi q \left(1 - \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\varphi_0}}\right).
\end{aligned}$$

Gleichsetzen $\Phi_{EA} = \Phi_{FD}$ liefert

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\varphi_0}}.$$

Mit Hilfe von $\cos\theta_0 = 1/\sqrt{1+\tan^2\theta_0}$ lässt sich das Ergebnis umschreiben in

$$1+\tan^2\theta_0 = \frac{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} = 1 + \frac{\sin^2\varphi_0 - \beta^2\sin^2\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} = 1 + \left(1-\beta^2\right)\tan^2\varphi_0$$

bzw. $\tan\varphi_0 = \tan\theta_0/\sqrt{1-\beta^2} = \gamma\tan\theta_0$.