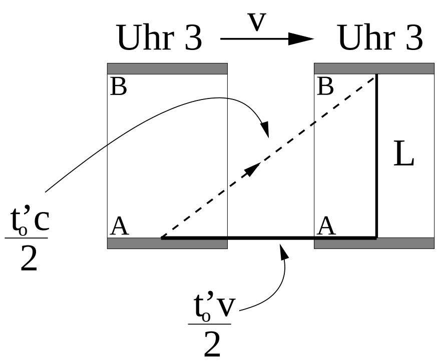
Lösungen zu Blatt 10 **11.06.2010**

10.1 Zeitdilatation und Längenkontraktion

a) Zwischen zwei parallelen Spiegeln A und B mit Abstand L bewege sich ein Lichtblitz hin und her. Diese „Uhr“ ticke bei jedem Auftreffen des Lichtblitzes auf den Spiegel A, was durch einen Zähler registriert werde. Es seien nun zwei solcher Uhren synchronisiert und in einem festen Abstand voneinander aufgestellt. Eine dritte bewege sich dazu mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v wie im Bild dargestellt. Berechne mit Hilfe geometrischer Überlegungen den Faktor, um den die bewegte Uhr langsamer geht als die beiden ruhenden.

Zwischen zwei Ticks der beiden ruhenden Uhren 1 und 2 vergeht die Zeit $t_0 = \frac{2L}{c}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Sei t_0' der zeitliche Abstand im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2, den der Lichtblitz in der bewegten Uhr 3 benötigt, um von Spiegel A nach Spiegel B und wieder zurück zu Spiegel A zu laufen. Während der Laufzeit von Spiegel A nach Spiegel B in Uhr 3, $t_0'/2$, hat sich Spiegel B bereits um die Strecke $t_0' v/2$ weiterbewegt. Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich sofort

$$L^2 + \left(\frac{t_0' v}{2}\right)^2 = \left(\frac{t_0' c}{2}\right)^2 \qquad \text{oder} \qquad t_0' = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} t_0 \; .$$



Im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 geht Uhr 3 also um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$ langsamer ($v < c\,!$) als die beiden ruhenden Uhren. Genauer gesagt, wenn Uhr 3 im Moment, indem sie sich am Ort von Uhr 1 befindet, den gleichen Zählerstand hat wie Uhr 2, so ist ihr Zählerstand im Moment, in dem sie sich am Ort von Uhr 2 befindet um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ geringer als der von Uhr 2.

b) Es sei der Versuchsaufbau wie in Teil (a) gegeben mit dem Unterschied, dass nun die sich bewegende dritte Uhr um 90° so gedreht ist, dass die Bewegungsrichtung der Uhr parallel zum Laufweg des Lichtblitzes in ihrem Innern ist.

Um welchen Faktor muss der Abstand der beiden Spiegel der bewegten dritten Uhr *verringert* werden, damit sie um den in Teil (a) berechneten Faktor langsamer geht?

Es sei L' der Spiegelabstand von Uhr 3 im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2. Angenommen, der Lichtstrahl braucht im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 die Zeit t_1', um in Uhr 3 von Spiegel A nach Spiegel B zu laufen. Weil B in dieser Zeit die Strecke vt_1' zurückgelegt hat gilt

$$L' + vt_1' = ct_1' \qquad \text{oder} \quad t_1' = \frac{L'}{c - v}.$$

Für die Laufzeit t_2', die das Licht von B nach A benötigt, ergibt sich analog

$$t_2' = \frac{L'}{c + v}.$$

Die Periodendauer t'_0 der bewegten Uhr 3 ist damit im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2

$$t'_0 = t'_1 + t'_2 = \frac{2L'}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})}. \tag{1}$$

Die Forderung aus der Aufgabenstellung, dass Uhr 3 um den selben Faktor langsamer geht wie in Teil (a) (die Zeitdilatation hängt alleine von der Relativbewegung beider Bezugssystemen ab), ist also

$$t'_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t_0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{2L'}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{2L}{c} \qquad \text{oder} \quad L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L.$$

Der Abstand zwischen den beiden Spiegeln der Uhr 3 erscheint im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 also verkleinert.

10.2 Kontrahierte Leiter

Ein Meister läuft mit Geschwindigkeit $v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$ ($\gamma = 2$) mit einer L_0 =2 m langen Leiter (Ruhelänge) horizontal auf der Schulter in einen Abstellraum der (Ruhe-)länge l_0 =1 m mit massiven Wänden, sein dort wartender Geselle soll hinter ihm die Türe schließen. Der Geselle sieht die lorentzkontrahierte Leiter von 1 m Länge, und ruft dem Meister zu, dass sich das locker ausgeht. Der Meister sieht den lorentzverkürzten Abstellraum von 1/2 m Länge, und bezweifelt das allerdings. Betrachte den Vorgang zunächst vom Ruhesystem S' des Abstellraumes und dann vom Ruhesystem S des Meisters aus. Wie löst sich das vermeintliche „Paradoxon“ auf? Zeige, dass der „Trick“ sogar für noch kürzere Abstellräume klappt, wenn nur $l_0 \geq l_{0,\mathrm{min}}$. Wie groß ist $l_{0,\mathrm{min}}$? Was sieht der Geselle in diesem Fall? Zeichne entsprechende Minkowskidiagramme und trage l_{min} bzw. $l_{0,\mathrm{min}}$ ein.
Hinweis: Ein absolut starrer Körper ist nach der Relativitätstheorie nicht möglich, die Signalgeschwindigkeit physikalischer Wirkungen ist c.
Aus der Sicht des Abstellraumes S':
Länge des Abstellraumes: $l' = l_0 = 1$ m
Länge der Leiter: $L' = L_0/\gamma$. Mit $\beta = v/c = \sqrt{3}/2$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 2$ folgt $L' = 1$ m.
Weltkarte von S' für jenen Zeitpunkt, zu dem Leiteranfang A die Wand berührt, zeigt, dass das Ende der Leiter E gerade in den Abstellraum hineinpasst, und man daher die Türe schließen kann. Dachdem die Leiter zum Stillstand gekommen ist, wird sie die Tür aufsprengen oder (und) sich deformieren.
Aus der Sicht der Leiter im Ruhesystem S:
Länge des Abstellraumes: $l = l_0/\gamma = 0,5$ m
Länge der Leiter: $L = L_0 = 2$ m.
Weltkarte von S für jenen Zeitpunkt, zu dem die Wand W die Leiter an deren Anfang A berührt, scheint zu zeigen, dass die Leiter nicht hineingeht.
Lösung des „Paradoxons“: Wegen der endlichen Signalgeschwindigkeit c physikalischer Wirkungen kann das Ende der Leiter E zunächst nichts davon wissen, dass die Wand W bei A angestoßen ist. E bleibt daher in S solange in Ruhe, bis von A nach E ein Signal (in Form einer Stoßwelle) gelaufen ist, welches E sagt, „Wir müssen mit“. In der Zwischenzeit wird aber A von W „mitgenommen“. E bleibt in Ruhe, bis die Zeit $t_s = 2\,\mathrm{m}/(3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}) = 2/c$ vergangen ist. In dieser Zeit läuft aber die Frontseite F des Abstellraumes die Strecke $s_F = vt_x = \frac{c\sqrt{3}}{2}\frac{2}{c} = \sqrt{3}\,\mathrm{m} \approx 1,732\,\mathrm{m} > 1,5\,\mathrm{m}$!
Die Leiter geht sogar „recht bequem“ hinein. Sie würde sogar noch hineingehen, wenn sie die Ruhelänge $0,5\,\mathrm{m} + v(L_0/c) = L_0$, oder $L_0 = 0,5\,\mathrm{m}/(1-\beta) = 1/(2-\sqrt{3})\,\mathrm{m} \approx 3,732\,\mathrm{m}$ hätte!
Anders betrachtet: Der Abstellraum könnte im Falle einer $L_0 = 2\,\mathrm{m}$ langen Leiter noch kürzer sein. Die minimale Länge l_{min} des Abstellraumes in S liegt dann vor, wenn das „Wettrennen“ von der Abstellraumfront F (Geschwindigkeit v) mit dem Signal $A \to E$ (Geschwindigkeit c) gerade „unentschieden“ ausgeht, also

$$\frac{2\,\mathrm{m} - l_{\mathrm{min}}}{v} = \frac{2\,\mathrm{m}}{c}$$

also $l_{min} = 2 - 2\frac{v}{c} = (2-\sqrt{3})\,\mathrm{m}$. $\Rightarrow l_{0,\mathrm{min}} = \gamma l_{\mathrm{min}} = 2(2-\sqrt{3})\,\mathrm{m} \approx 0,534\,\mathrm{m}$.
Das Geschehen für $l_{0,\mathrm{min}}$ aus der Sicht des Gesellen in S':

Berührt A zum ersten Mal die Wand, so „weiß“ E noch nichts davon, läuft also noch unverändert in den Abstellraum hinein. Das kleinstmögliche $l_0 = l_{0,\min}$ für das eine $L_0 = 2\,\mathrm{m}$ Leiter gerade hineingeht, liegt dann vor, wenn das Leiterende von E nach F (Geschwindigkeit v) mit dem Signal A (bzw. W) nach F (Geschwindigkeit c) zusammentrifft:

$$\frac{1\,\mathrm{m} - l_{0,\min}}{v} = \frac{l_{0,\min}}{c}$$

$l_{0,\min} = 1\,\mathrm{m}/(1+\frac{v}{c}) = 2/(2+\sqrt{3})\,\mathrm{m} = 2(2-\sqrt{3})\,\mathrm{m} \approx 0,534\,\mathrm{m}$ wie gehabt.

10.3 Viererverktoren

Gegeben seien Lorentztransformation in x-Richtung $\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)$ (siehe Vorlesungsfolien), in y-Richtung $\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')$, und eine Drehung $D^\mu{}_\nu(\alpha)$ um die z-Achse:

$$(\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')) = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (D^\mu{}_\nu(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie ein Vierervektor $x^\mu = (ct, x, y, z)$.
a) Zeige: Ist x^μ raumartig (lichtartig, zeitartig), so ist auch $s^\mu := \Lambda^\mu_{\ \nu}(\beta)x^\nu$ raumartig (lichtartig, zeitartig).
Lösungsweg 1:

$$s^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}(\beta)x^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma x \\ -\beta\gamma ct + \gamma x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_\mu s^\mu &= (\gamma ct - \beta\gamma x)^2 - (-\beta\gamma ct + \gamma x)^2 - y^2 - z^2 \\ &= (\gamma ct)^2 - 2\gamma ct\beta\gamma x + (\beta\gamma x)^2 - (\beta\gamma ct)^2 + 2\beta\gamma ct\gamma x - (\gamma x)^2 - y^2 - z^2 \\ &= (ct)^2\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) - x^2\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) - y^2 - z^2 \\ &= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_\mu x^\mu. \end{aligned}$$

Hier wurde verwendet $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = (1-\beta^2)/(1-\beta^2) = 1$, mit $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Wenn $x_\mu x^\mu < 0$ (raumartig), $= 0$ (lichtartig) > 0 (zeitartig), dann erfüllt $s_\mu s^\mu = x_\mu x^\mu$ das selbe.
Lösungsweg 2:

$$s_\mu s^\mu = \Lambda_\mu^{\ \rho}(\beta)x_\rho\Lambda^\mu_{\ \nu}(\beta)x^\nu = x_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\beta)\Lambda^\mu_{\ \nu}(\beta)x^\nu = x_\rho\delta^\rho_\nu x^\nu = x_\rho x^\rho.$$

Hier wurde verwendet $\Lambda_\mu^{\ \rho}(\beta) = \Lambda^\rho{}_\mu(-\beta) = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\beta)$.
b) Zeige, dass im Allgemeinen $\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)\Lambda'^\nu{}_\sigma(\beta') \neq \Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')\Lambda^\nu{}_\sigma(\beta)$. Unter welchen Bedingungen gilt das Gleichheitszeichen „=“?

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)\Lambda'^\nu{}_\sigma(\beta') = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\beta\gamma & -\gamma\beta'\gamma' & 0 \\ -\beta\gamma\gamma' & \gamma & \beta\gamma\beta'\gamma' & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')\Lambda^\nu{}_\sigma(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\beta'\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\beta\gamma\gamma' & -\beta'\gamma' & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ -\gamma\beta'\gamma' & \beta\gamma\beta'\gamma' & \gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gleichheit nur, wenn $\gamma' = 1$, $\beta' = 0$ oder $\gamma = 1$, $\beta = 0$ (also eine Transformation ist die Identität).
c) Zeige: Lässt sich das Produkt der zwei Lorentz-Transformationen in folgender Weise schreiben: $\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)\Lambda'^\nu{}_\sigma(\beta') = D^\mu{}_\nu(\alpha')\Lambda^\nu{}_\tau(\beta'')D^\tau{}_\sigma(\alpha)$, dann folgt daraus $\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')\Lambda^\nu{}_\sigma(\beta) = D^\mu{}_\nu(-\alpha)\Lambda^\nu{}_\tau(\beta'')D^\tau{}_\sigma(-\alpha')$.

Lösungsweg 1:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)D^\nu{}_\sigma(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\cos\alpha & \beta\gamma\sin\alpha & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma\cos\alpha & -\gamma\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D^\mu{}_\nu(\alpha')\Lambda^\nu{}_\tau(\beta'')D^\tau{}_\sigma(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha' & -\sin\alpha' & 0 \\ 0 & \sin\alpha' & \cos\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\cos\alpha & \beta\gamma\sin\alpha & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma\cos\alpha & -\gamma\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\cos\alpha & \beta\gamma\sin\alpha & 0 \\ -\beta\gamma\cos\alpha' & (\gamma\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') & (-\gamma\sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha') & 0 \\ -\beta\gamma\sin\alpha' & (\gamma\cos\alpha\sin\alpha' + \sin\alpha\cos\alpha') & (-\gamma\sin\alpha\sin\alpha' + \cos\alpha\cos\alpha') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Erkenne, dass $\Lambda^\mu{}_\nu(\beta)\Lambda'^\nu{}_\sigma(\beta')$ und $\Lambda'^\mu{}_\nu(\beta')\Lambda^\nu{}_\sigma(\beta)$ gerade Transponierte voneinander sind. Vergleich mit obigen Formeln führt auf das angegebene Ergebnis, da Vertauschen von $\alpha \leftrightarrow -\alpha'$ genau auf die Transponierte Matrix führt, genau wie oben.
Lösungsweg 2:
Einfach gesamten Ausdruck transponieren (hier in Kurznotation für Matrizen - griechische Indizes können leicht hinzugefügt werden).

$$\Lambda(\beta)\Lambda'(\beta') = D(\alpha')\Lambda(\beta'')D(\alpha) \qquad (\Lambda(\beta)\Lambda'(\beta'))^T = (D(\alpha')\Lambda(\beta'')D(\alpha))^T$$

$$\Lambda'(\beta')^T\Lambda(\beta)^T = D(\alpha)^T\Lambda(\beta'')^T D(\alpha')^T$$

$$\Lambda'(\beta')\Lambda(\beta) = D(-\alpha)\Lambda(\beta'')D(-\alpha')$$

da für Lorentztransformationen gilt $\Lambda^T(\beta) = \Lambda(\beta)$ und für Drehungen gilt $D(\alpha)^T = D(-\alpha)$.