Lösungen zu Blatt 11 **18.06.2010**

11.1 Zwillingsparadoxon

Während ein Zwilling auf der Erde studiert, reist seine Zwillingsschwester wie in nebenstehender Abbildung gezeigt durchs sonnige Universum: Die Abschnitte (1), (3), (4), (6) sind jeweils Pfade konstanter Beschleunigung in ihrem jeweiligen momentanen Ruhesystem, während die Abschnitte (2) und (5) gleichförmige Bewegung beschreiben.
a) Wie verhalten sich die Eigenzeitintervalle $\Delta\tau_E$ und $\Delta\tau_R$ zueinander, die auf der Erde bzw. in der Rakete vergangen sind, wenn sich die Zwillinge wieder treffen? Dabei möchte die Zwillingsschwester auf ihrer Reise insgesamt die gleiche Zeitdauer (aus der Sicht des Bezugssystems der Erde) beschleunigen wie sie gleichförmig bewegt fliegt. Wie groß sind die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$ und die maximale Entfernung $x_{\max}$, die sie dabei erreicht?
Eigenzeit: $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\mathrm{d}t$. Hyperbolische Bewegung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right), \\ v(t) &= \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}, \\ \Delta\tau &= \frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_2}{c} - \frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_1}{c} \end{aligned}$$

Im System der Erde S vergeht folgende Zeit für $0 \le t \le 8t_0$, wobei die Dauer $4t_0$ beschleunigt wird, und $4t_0$ gleichförmig bewegt wird (also $4\times t_0$ Beschleunigungsteile und $2\times(2t_0)$ unbeschleunigte Teile):

$$\begin{aligned} x_E(t) &= 0, \\ v_E(t) &= 0, \\ \Delta\tau_E &= 8t_0 \end{aligned}$$

Also $t_0 = \Delta\tau_E/8$. Für die Rakete gilt für $0 \le t \le t_0$:

$$\begin{aligned} x_R(t) &= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right) \\ v_{\max} &= v(t_0) = \frac{at_0}{\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}} \\ x_{\max} &= 2x_R(t_0) + v(t_0)(2t_0) = \frac{2c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}-1\right) + \frac{2at_0^2}{\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

mit $t_0 = \Delta\tau_E/8$. Die Eigenzeit der Rakete berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \Delta\tau_R &= 4\times\frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_0}{c} + 2\times(2t_0)\times\sqrt{1-\frac{v^2(t_0)}{c^2}} \\ &= 4\times\frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_0}{c} + \frac{4t_0}{\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

b) Berechne $\Delta\tau_R$, $\Delta\tau_E - \Delta\tau_R$, $v_{\max}$, und $x_{\max}$ für die konstante Beschleunigung $g_0 = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ für den Fall, dass auf der Erde 1 Jahr, 10 Jahre, 20 Jahre vergehen.

1 Jahr $= 1$ a $= 3,15 \times 10^7$ s. 1 Lichtjahr $= 1$ Lj $= 9,45 \times 10^{15}$ m Eingesetzt ergibt das

$\Delta\tau_E$	$\Delta\tau_R$	$\Delta\tau_E - \Delta\tau_R$	$x_{\max}$	$v_{\max}$
1 a	0.995 a	0.005 a=2 d	$4,5 \times 10^{14}\,\text{m} = 0,05\,\text{Lj}$	0.13 c
10 a	7,2 a	2,8 a	$3 \times 10^{16}\,\text{m} = 3,2\,\text{Lj}$	0.79 c
20 a	10,1 a	9,9 a	$7,6 \times 10^{16}\,\text{m} = 8,1\,\text{Lj}$	0.93 c

c) Die Schwester will mit der gleichen Treibstoffmenge noch weiter fliegen, also verlängert sie die Reiseabschnitte gleichförmiger Bewegung (2) und (5). Zeige, dass im Grenzfall sehr langer Reisen gilt

$$\Delta\tau_R = \frac{\Delta\tau_E}{\gamma(v_{\max})}.$$

Allgemein gilt für $\Delta\tau_E = 4t_A + 4t_B$

$$\begin{aligned}
\Delta\tau_R &= 4 \times \frac{c}{a}\text{Arsinh}\frac{at_A}{c} + 2 \times (2t_B) \times \sqrt{1 - \frac{v^2(t_A)}{c^2}} \\
&= 4 \times \frac{c}{a}\text{Arsinh}\frac{at_A}{c} + \frac{2 \times (2t_B)}{\gamma(v_{\max})} \\
&\approx \frac{4t_B}{\gamma(v_{\max})} = \frac{\Delta\tau_E}{\gamma(v_{\max})}
\end{aligned}$$

wobei $v(t_A) = v_{\max}$ und $\gamma(v) = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c$ verwendet wurde. In der letzten Zeile wurde $t_B \gg t_A$ verwendet.

11.2 Fußballnetz zwischen zwei Raketen

Zur galaktischen Fußballmeisterschaft auf Alpha Centauri im Jahr 3010 soll ein österreichisches Transportunternehmen ein riesengroßes Fußballnetz transportieren. Hierfür wird das Fußballnetz, das sich bereits in der Umlaufbahn befindet, so zwischen zwei Raketen gespannt, dass der Abstand samt Befestigungsseilen (also der Abstand von R_1 nach R_2) die Gesamtlänge L_0 ausmacht. Leider bestehen Netz und Befestigungsseile aus einem Material, das reißt, wenn es um mehr als 1% gedehnt wird (d.h wenn die Länge von R_1 nach R_2 in seinem Ruhesystem $1,01 \cdot L_0$ überschreitet). Der Transportunternehmer will, dass beide Raketen zur selben Zeit $t_0 = 0$ starten, und bis zum Zeitpunkt $t_1 = 2 \cdot 10^6\,\text{s}$ (Erdzeit) mit konstanter Beschleunigung $\vec{a} = 30\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}\vec{e}_x$ (im jeweiligen momentanen Ruhesystem) beschleunigen, bevor sie dann gleichförmig bis zum Ziel weiterfliegen.

Wird dieser Transport funktionieren, ohne dass etwas reißen muss? (Hinweis: Berechne den Abstand zwischen R_1 und R_2 lange nach der Beschleunigungsphase sowohl im Ruhesystem der Erde als auch im mitbewegten System und skizziere das zugehörige Minkowski-Diagramm.)

Hyperbolische Bewegung mit $\vec{a} = a\vec{e}_x$. Für $t \leq t_0 = 0$ gilt $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = L_0$, $v_1(t) = v_2(t) = 0$. Für $0 \leq t \leq t_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right), \\
x_2(t) &= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right) + L_0, \\
v_1(t) &= v_2(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

Für $t \geq t_1$ gilt

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1(t_1) + v(t_1)\,(t - t_1)\,, \\
x_2(t) &= x_2(t_1) + v(t_1)\,(t - t_1)\,, \\
v_1(t) &= v_2(t) = v(t_1)
\end{aligned}$$

Der Abstand im (ruhenden) Erdsystem S ist also stets $x_2(t) - x_1(t) = L_0$, für alle t.

Betrachtet man nun den Abstand L_0' im bewegten System S' zu einem Zeitpunkt t, zu dem beide Raketen ruhen, so findet man die Länge

$$L_0' = \gamma(v(t_1))L_0 > L_0.$$

Einsetzen der Zahlen $a = 3000\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $c = 3\times10^{10}\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $t_1 = 2\times10^{6}\,\mathrm{s}$ liefert:

$$\gamma(v(t_1)) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t_1)}{c^2}}} = \sqrt{1+\frac{a^2t_1^2}{c^2}} = \sqrt{1,04} \approx 1,0198 > 1,01.$$

D.h. das Seil (oder das Netz) muss bis dahin bereits gerissen sein.

11.3 Index-Gymnastik

a) Die Komponenten eines kontravarianten Vierervektors a^μ transformieren gemäß $a'^\mu = (\partial x'^\mu/\partial x^\lambda)a^\lambda$, die eines kovarianten Vierervektors a_μ gemäß $a'_\mu = (\partial x^\alpha/\partial x'^\mu)a_\alpha$ (z.B. für eine Lorentztransformation $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$). Zeige, dass damit $a^\mu a_\mu$ invariant ist.
b) Der Vierergradient ist folgendermaßen definiert:

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right).$$

Überzeuge dich davon, dass diese Definition „Sinn“ macht, also dass die Differentiation nach den Komponenten eines kontravarianten Vektors $\partial/\partial x^\mu$ tatsächlich so wie die Komponenten eines kovarianten Vierervektors transformiert.
Hier ist die Kettenregel anzuwenden:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Man erhält das selbe Transformationsverhalten wie für kovariente Vierervektoren.
c) Welche Bedingung muss der Viererimpuls k^μ erfüllen, damit

$$\partial_\mu\partial^\mu e^{ik\cdot x} = 0$$

gilt. Hier ist $k\cdot x = k_\mu x^\mu$ das Skalarprodukt im Minkowski-Raum und $\partial_\mu\partial^\mu$ der 4-dimensionale Laplace-Operator, der in der Wellengleichung auftritt.

$$\partial_\mu\partial^\mu e^{ik\cdot x} = -k^\mu k_\mu e^{ik\cdot x}.$$

Deshalb ist die Gleichung $\partial_\mu\partial^\mu e^{ik\cdot x} = 0$ erfüllt, wenn $k^\mu k_\mu = 0$, oder $k_0^2 = \vec{k}^2$.
d) Zeige, dass für einen nicht-lichtartigen Vierervektor x^μ, d.h. $x^2 \neq 0$,

$$\partial_\mu\partial^\mu\frac{1}{x^2} = 0$$

gilt, wobei $x^2 = x_\mu x^\mu$.

$$\begin{aligned}\partial_\mu\partial^\mu\frac{1}{x^2} &= \partial_\mu\left(-\frac{2}{x^3}\partial^\mu\sqrt{x_\nu x^\nu}\right) = -2\delta^\mu_\nu\partial_\mu\frac{x^\nu}{x^4} = -2\left(\frac{\delta^\mu_\nu\delta^\nu_\mu}{x^4} - 4\frac{x^\nu x_\sigma\delta^\sigma_\mu}{x^6}\right)\\ &= -\frac{2}{x^4}\left(4-4\frac{x^2}{x^2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Beachte, dass dieses Ergebnis explizit die 4-Dimensionalität benutzt. In einem 2- oder 3-dimensionalen Minkowski-Raum verschwindet der Ausdruck nicht.