EDyn I — Tutorien Fr., 18. 3. 2011

1. Berechnen Sie:
   a) die Komponenten von grad $(\vec{\alpha} \cdot \vec{r})$ in Kugelkoordinaten, wobei $\vec{\alpha}$ ein konstanter Vektor sei,
   b) div $\hat{e_r}$, grad div $\hat{e_r}$, rot $\hat{e_r}$, div $\hat{e_\varphi}$ und rot $\hat{e_\vartheta}$ in Kugelkoordinaten,
   c) die Komponenten von rot $(\vec{\beta} \times \vec{r})$ in Zylinderkoordinaten , wobei $\vec{\beta}$ ein konstanter Vektor in z-Richtung ist.

2. Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = y \cdot \hat{e_z}$, sowie die Fläche F, definiert als der im ersten Oktanten gelegene Teil der Ebene $6x + 3y + 2z = 12$.
   a) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{a}(\vec{r})$ durch F.
   b) Das divergenzfreie Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ lässt sich als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{b}(\vec{r})$ schreiben. Konstruieren Sie ein mögliches $\vec{b}(\vec{r})$. Ist die Wahl eindeutig?
   Berechnen Sie nochmals den Fluss von $\vec{a}(\vec{r})$ durch F, nun mit Hilfe eines Linienintegrals über den Weg C, welcher die Fläche F begrenzt. Wie wirkt sich die Nicht-Eindeutigkeit von $\vec{b}(\vec{r})$ aus?

3. Es sei $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ das elektrostatische Feld einer positiven Punktladung Q im Ursprung.
   a) Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}\,\delta^{(3)}(\vec{r})$ gilt.
   Für den Fall $\vec{r} = 0$ wenden Sie den Gaußschen Satz unter Verwendung einer beliebigen Testfunktion an.
   b) Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ gilt.
   Für den Fall $\vec{r} = 0$ benützen Sie folgende Definition der Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{A}$$

   Zeigen Sie, dass diese Definition für (glatte) Vektorfelder mit der üblichen Definition übereinstimmt, indem Sie über die Flächen eines beliebig kleinen Würfels integrieren.

   Ankreuzbar: 1abc, 2ab, 3ab