1. Tutorium - Lösungen **16.03.2012**

1.1 Indexschreibweise

$\left(\vec{x}\times\vec{\nabla}\right)\times\left(\vec{\nabla}r\right)\to\varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{jlm}x_l\partial_m\right)\left(\partial_k r\right)$

$=\underbrace{\varepsilon_{kij}\varepsilon_{jlm}}_{\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il}}\;x_l\partial_m\underbrace{\partial_k r}_{\frac{x_k}{r}}=\left(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il}\right)x_l\left[\frac{1}{r}\big(\underbrace{\partial_m x_k}_{\delta_{mk}}\big)+x_k\underbrace{\partial_m\left(\frac{1}{r}\right)}_{-\frac{1}{r^2}\underbrace{\partial_m r}_{\frac{x_m}{r}}}\right]$

$=\left(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il}\right)\left[\frac{x_l\delta_{mk}}{r}-\frac{x_l x_k x_m}{r^3}\right]$

$=\frac{x_i}{r}-\underbrace{x_k x_k}_{r^2}\frac{x_i}{r^3}-\frac{x_i}{r}\underbrace{\delta_{kk}}_{3}+\underbrace{\frac{x_i x_k x_k}{r^3}}_{\frac{x_i}{r}}=-\frac{2x_i}{r}\to-\frac{2\vec{x}}{r}$

1.2 Integralsatz von Stokes

a) Fläche parametrisiert durch $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $0\leq s$, $0\leq t$, und $s+t\leq 1$, also $t\leq 1-s$.

Infinitesimale Flächenelemente: $d\vec{s}=ds\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$, $d\vec{t}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\to d\vec{f}=d\vec{s}\times d\vec{t}=ds\,dt\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=ds\,dt\begin{pmatrix}8\\2\\16\end{pmatrix}$.

Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})=z\cdot\hat{e}_y=\begin{pmatrix}0\\z\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}$.

$\Phi=\int_F\vec{B}\cdot d\vec{f}=\int_F\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\2\\16\end{pmatrix}ds\,dt=\int_0^1 ds\int_0^{1-s}dt\,2t=\int_0^1 ds\,(1-s)^2=\int_0^1 du\,u^2=\frac{1}{3}$.

(Um sich das Ausmultiplizieren zu sparen, wurde hier $1-s=u$ gesetzt, und $\int_0^1 ds...=-\int_1^0 du...=\int_0^1 du...$ verwendet. Man kann aber genausogut $\int_0^1 ds\,(1-s)^2=\int_0^1 ds\left(1-2s+s^2\right)$ ausintegrieren.)

b) $\vec{B}(\vec{r})=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})=\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_y A_z-\partial_z A_y\\\partial_z A_x-\partial_x A_z\\\partial_x A_y-\partial_y A_x\end{pmatrix}\stackrel{!}{=}\begin{pmatrix}0\\z\\0\end{pmatrix}$.

z.B. $\vec{A}(\vec{r})=\begin{pmatrix}\frac{z^2}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ oder $\vec{A}(\vec{r})=\begin{pmatrix}0\\0\\-xz\end{pmatrix}$.

c) Streckenabschnitte:

$C_1: t=0,\ 0\leq s\leq 1.\ \vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\ d\vec{r}=d\vec{s}=ds\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$.

$C_2: 0\leq t\leq 1,\ s=1-t.\ \vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+(1-t)\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-8\\1\end{pmatrix}$,

$d\vec{r} = dt \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C_3 : 1 \geq t \geq 0,\ s = 0.\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ d\vec{r} = d\vec{t} = dt \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Integrale:

$c_1 = \int_{C_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} ds = 0.$

$c_2 = \int_{C_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -\int_0^1 \underbrace{x}_{0} \underbrace{z}_{t} dt = 0.$

$c_3 = \int_{C_3} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_1^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -\int_1^0 \underbrace{x}_{(2-2t)} \underbrace{z}_{t} dt = 2\int_0^1 \left(t - t^2\right) dt = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$

Ergebnis: $c_1 + c_2 + c_3 = \frac{1}{3}$.

Das selbe Ergebnis würde man auch mit einer anderen Wahl von $\vec{A}(\vec{r})$ erhalten, das zum gegebenen $\vec{B}(\vec{r})$ passt.

1.3 Gaußscher Integralsatz

a) Ladungsverteilung: $\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4\pi x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x.$

Volumen: $0 \leq x, y, z$, und $x + y + z \leq 1$.

Also: $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y$.

Gesamtladung $Q = \int_V \rho dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz\, 2x = \int_0^1 dx\, 2x \int_0^{1-x} dy\, (1 - x - y) = \int_0^1 dx\, 2x \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} \right) =$

$\int_0^1 dx\, x \left[2(1-x) - 2x(1-x) - (1-x)^2\right] = \int_0^1 dx \left[2x - 2x^2 - 2x^2 + 2x^3 - x + 2x^2 - x^3\right] = \int_0^1 dx \left[x^3 - 2x^2 + x\right] =$

$\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3-8+6}{12} = \frac{1}{12}.$

b) Fläche F_1: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq s \leq 1$ und $0 \leq t \leq 1 - s$.

(Schlaue Wahl der Parametrisierung kann Rechnung vereinfachen).

$d\vec{f} = d\vec{s} \times d\vec{t} = ds\, dt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = ds\, dt \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$f_1 = \int_{F_1} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_{F_1} \begin{pmatrix} 4\pi x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ds\, dt = \int_0^1 ds \int_0^{1-s} dt\, 4\pi \underbrace{x^2}_{s^2} = 4\pi \int_0^1 ds\, s^2 \int_0^{1-s} dt = 4\pi \int_0^1 ds \left(s^2 - s^3\right) =$

$4\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 4\pi \frac{1}{12}.$

Fläche $F_2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ z = 0,\ d\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Flächennormale zeigt nach außen)

$f_2 = \int_{F_2} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_{F_2} \begin{pmatrix} 4\pi x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx\, dy = 0.$

Fläche $F_3 : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - y,\ x = 0,\ d\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_3 = \int_{F_3} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_{F_3} \begin{pmatrix} 4\pi x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy\, dz = -\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz 4\pi \underbrace{x^2}_{0} = 0.$

Fläche $F_4 : 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1 - z,\ y = 0,\ d\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_4 = \int_{F_4} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_{F_4} \begin{pmatrix} 4\pi x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx\, dy = 0.$

Ladung $Q = \frac{1}{4\pi} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = \frac{1}{12}.$