2. Tutorium - Lösungen **23.03.2012**

2.1 Kugel- und Zylinderkoordinaten

a) $\mathrm{div}\vec{r} = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3$.
$\mathrm{div}\hat{e}_r = \partial_i\left(\frac{x_i}{r}\right) = \frac{\delta_{ii}r - x_i\frac{x_i}{r}}{r^2} = \frac{3r-r}{r^2} = \frac{2}{r}$.
$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\hat{e}_r = \mathrm{grad}\frac{2}{r} \to \partial_i\frac{2}{r} = -\frac{2}{r^2}\frac{x_i}{r} = -\frac{2x_i}{r^3} \to -\frac{2}{r^2}\hat{e}_r$.
$\mathrm{rot}\vec{r} \to \varepsilon_{ijk}\partial_j r_k = \varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$.
b) $\mathrm{div}\vec{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot r\right) + 0 + 0 = \frac{1}{r^2}3r^2 = 3$.
$\mathrm{div}\hat{e}_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot 1\right) + 0 + 0 = \frac{2}{r}$.
$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\hat{e}_r = \mathrm{grad}\frac{2}{r} = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\right) = -\hat{e}_r\frac{2}{r^2}$.
$\mathrm{rot}\vec{r} = 0$.
c) Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$
$\mathrm{div}\vec{r} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\cdot R\right) + 0 + \frac{\partial z}{\partial z} = 2 + 1 = 3$.
$\mathrm{div}\hat{e}_r = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) + 0 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{1}{R}\frac{2R\sqrt{R^2+z^2} - R^2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}2R}{R^2+z^2} + 0 + \frac{\sqrt{R^2+z^2} - z\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}2z}{R^2+z^2} = \frac{2R^2+2z^2-R^2+R^2+z^2-z^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2R^2+2z^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{2}{r}$.
$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\hat{e}_r = \mathrm{grad}\frac{2}{\sqrt{R^2+z^2}} = \hat{e}_R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{2}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = -\hat{e}_R\frac{2R}{(R^2+z^2)^{3/2}} - \hat{e}_z\frac{2z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = -\hat{e}_R\frac{2R}{r^3} - \hat{e}_z\frac{2z}{r^3} = -2\hat{e}_r\frac{r}{r^3}$.
$\mathrm{rot}\vec{r} = \hat{e}_\varphi\left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial R}\right) = 0$.

2.2 Definition des Ampere

a) Ausgehend von Biot-Savart

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = k_3\int_{\mathcal{L}_1}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{r}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

und dem 1. Ampèreschen Gesetz angewendet auf eine Leiterschleife

$$\vec{F}_2 = k_4\int_{\mathcal{L}_2}\left[I_2\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B}_1(\vec{r})\right]$$

wird zunächst $\vec{B}_1$ berechnet. $\mathcal{L}_1$ wird in the z-Achse gelegt, und durch $\vec{r}\,' = (0,0,z')$ parametrisiert, und $\mathcal{L}_2$ im Abstand d an der Position $x = d$, $y = 0$ parallel dazu gelegt. Aus Symmetriegründen ist $\vec{B}_1(d,0,z) = \vec{B}_1(d,0,0)$ für alle z. $\vec{B}_1(d,0,0)$ ist gegeben durch (Integral siehe Hinweis)

$$\vec{B}_1(d,0,0) = k_3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I_1}{(d^2+z'^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}0\\0\\\mathrm{d}z'\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d\\0\\-z'\end{pmatrix} = k_3I_1d\vec{e}_y\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z'}{(d^2+z'^2)^{3/2}} = k_3I_1d\vec{e}_y\frac{2}{d^2} = \frac{2k_3I_1}{d}\vec{e}_y.$$

Das in $\vec{F}_2$ eingesetzt ergibt

$$\vec{F}_2 = k_4I_2\frac{2k_3I_1}{d}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\\mathrm{d}z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] = -\vec{e}_xk_3k_4\frac{2I_1I_2}{d}\int_{-\infty}^{\infty}dz.$$

In der Form würde das divergieren, aber man kann die Integrationsgrenzen anders wählen - z.B. nur die Kraft von 0 bis l ausrechnen:

$$\vec{F}_2 = -\vec{e}_x k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d} \int_0^l dz = -\vec{e}_x k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d} l.$$

Nimmt man den Betrag dieser Relation, bzw. bezeichnet man mit F die in Richtung des anderen Leiters wirkende Kraft, also $\vec{F}_2 = -F\vec{e}_x$, so erhält man die Lösung

$$\frac{F}{l} = k_3 k_4 \frac{2I_1 I_2}{d}.$$

*) Zunächst wird festgestellt, dass durch die Neudefinition des Ampere die Elementarladung auf exakt $1.60217653 \times 10^{-19}$ C festgelegt wird, da 1 C = 1 As weiterhin gilt (bisher war die Elementarladung eine Messgröße).
In der Formel, die in der Ampere-Definition verwendet wird,

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d},$$

gibt es im Wesentlichen drei Größen: die Kraft pro Länge F/l, die magnetische Feldkonstante μ_0 und den Strom durch Abstand $2I^2/d$. Derzeit wird μ_0 willkürlich auf $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A}^2$ festgelegt. Durch Einsetzen von 1 A (unabhängig davon, was jetzt „1 A“ bedeutet) erhält man für F/l den Wert $2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N/m}$. Dieser ist aber eine physikalisch messbare Größe, die nur dann erreicht wird, wenn ein ganz bestimmter Strom durch den Leiter fließt (und derzeit somit 1 A definiert). Wenn 1 A gemäß der neuen Definition umdefiniert wird, würde ein (geringfügig) anderer Strom durch die Leitungen fließen, und die Kraft würde sich (geringfügig) ändern. Da 1 N = 1 kg m/s^2, wäre eine Möglichkeit, μ_0 weiterhin zu fixieren, und über obige Relation das Kilogramm neu zu definieren. Wenn man aber das Kilogramm definiert (egal ob über das Urkilogramm oder über eine exakte Definition von h), dann muss sich der Wert von μ_0 (geringfügig) ändern, damit die Relation weiterhin gilt (exakte Definitionen von Lichtgeschwindigkeit und Sekunde vorausgesetzt).
Mit der Neudefinition des Kilogramms kann man aber auch wie folgt argumentieren: Da die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/(2c_0\varepsilon_0 h) \approx 1/137$ eine dimensionslose physikalische Konstante ist, die nur experimentell bestimmt werden kann, können nicht alle 4 dimensionsbehafteten Größen der Gleichung (e, c_0, ε_0, h) gleichzeitig definiert werden - zumindest eine (wenn nicht mehrere) müssen abgeleitet sein. Da schon derzeit c_0 exakt definiert ist, und in der neuen Definition e und h auch exakt definiert werden würden, kann ε_0 nicht auch noch exakt definiert werden und ist daher abgeleitet. Wegen $c_0^2 = 1/(\varepsilon_0\mu_0)$ muss daher auch μ_0 eine abgeleitete Größe sein, und kann nicht mehr exakt auf $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A}^2$ festgelegt werden. Mit den neuen Definitionen würde sich μ_0 in der Größenordnung von 1:10^9 ändern.

2.3 Punktladung

a)

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a).$$

$$\phi(\vec{r}) = k_1 \int dx'dy'dz' \frac{q\delta(x')\delta(y')\delta(z'-a)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = k_1 \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}.$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_1 q \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \frac{k_1 q}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}.$$

b) Für $(x,y,z) \neq (0,0,a)$ gilt:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = k_1 q \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\frac{2y(z-a)}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{5/2}} - \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2y(z-a)}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{5/2}} \\ \text{analog} \\ \text{analog} \end{pmatrix} = 0$$

oder schneller: $\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi = 0$.

$$\operatorname{div}\vec{E} = k_1 q\left(\frac{1}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}} + x\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{5/2}} + ...\right) = 0.$$

Um die Ladung herum verwendet man den gaußschen Integralsatz:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{E} d^3r = \int_{\partial V} \vec{E} d^2\vec{f}.$$

Mit $d^2\vec{f} = \vec{n}dA = \vec{n}\tilde{r}^2 d\Omega$ um die Ladung herum (also $\tilde{r}^2 = x^2+y^2+(z-a)^2$) und

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\int_V \operatorname{div}\vec{E} d^3r = \int_{S=\partial V} \vec{E} d^2\vec{f} = k_1 q \int_S \frac{x^2+y^2+(z-a)^2}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\tilde{r}^2 d\Omega = k_1 q \int_S d\Omega = 4\pi k_1 q.$$

Für die Rotation erhält man

$$\int_V \mathrm{d}r\partial_i ... = \int_{S=\partial V} \mathrm{d}^2 f_i ... \quad \text{mit} ... = \varepsilon_{jik}E_k \quad \to \quad \int_V \operatorname{rot}\vec{E} d^3r = \int_{S=\partial V} d^2\vec{f}\times\vec{E} = \int_S \vec{n}\times\vec{E}\tilde{r}^2 d\Omega.$$

Hier gilt wegen $\vec{n}\times\vec{E} = 0$, dass für jede umschließende Hülle 0 als Ergebnis herauskommt.
c) Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) = k_1\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -k_1 q\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}} \\ &= k_1 q\left(\vec{e}_r\frac{r-a\cos\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{3/2}} + \vec{e}_\theta\frac{a\sin\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{3/2}} + \vec{e}_\varphi 0\right). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man wieder $\vec{E}$:

$$(r-a\cos\theta)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} + a\sin\theta\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}.$$