3. Tutorium - Lösungen **30.03.2012**

3.1 Kräfte zwischen Kreis- und Linienstrom

Gegeben sei ein unendlich langer dünner Leiter L_1, der im Abstand $x = d$ parallel zur y-Achse verläuft und von einem zeitlich konstanten Strom I_1 durchflossen wird.
a) Berechne das Magnetfeld und daraus ein Vektorpotential.
Zylinderkoordinaten werden entlang der y-Achse angewendet $(x, y, z \to z, x, y)$:

$$z = r\cos\varphi, \qquad x = r\sin\varphi, \qquad y = y, \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_z + \cos\varphi\vec{e}_x = -\frac{x}{r}\vec{e}_z + \frac{z}{r}\vec{e}_x$$

Translationsinvarianz bezüglich y-Achse liefert $B_i(r,\varphi,y) = B_i(r,\varphi)$, und $B_y = 0$. Außerdem gilt $B_r = 0$ wegen $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ oder in Integralform $\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{f} = 0 = 2B_r\pi rl$. Bleibt also B_φ zu berechnen. Für $\vec{B} = B_\varphi\vec{e}_\varphi$ erhält man:

$$\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}\mathrm{d}\vec{f} \qquad \to \qquad 2\pi r B_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c}I_1 \qquad \to \qquad B_\varphi(r) = \frac{2I_1}{cr}$$

$$\vec{B} = \frac{2I_1}{cr}\vec{e}_\varphi = \frac{2I_1}{c}\left(\frac{z}{z^2+x^2}, 0, -\frac{x}{z^2+x^2}\right) \qquad \xrightarrow{x\to x-d} \vec{B} = \frac{2I_1}{c}\left(\frac{z}{z^2+(x-d)^2}, 0, \frac{d-x}{z^2+(x-d)^2}\right).$$

Berechnung des Vektorpotentials über $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. Mit $\vec{A} \sim A_y(r)$ folgt $-\partial A_y/\partial r = B_\varphi$, und somit $A_y = (-2I_1/c)\ln r + c$.

$$A_y = -\frac{I_1}{c}\ln\left[z^2 + (x-d)^2\right].$$

b) Betrachte zusätzlich einen dünnen Leiter L_2, welcher einen Kreis mit Radius $a < d$ und Mittelpunkt im Ursprung bildet und ebenfalls in der x-y-Ebene liegt. Dieser werde von einem konstanten Strom I_2 durchflossen. Berechne die auf den Leiter L_2 wirkende Kraft $\vec{F}$.
Kraft auf Leiter: $\vec{F} = \frac{I_2}{c}\int_{L_2}\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B}(r)$, mit $\vec{r} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$. $\mathrm{d}\vec{r} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)a\mathrm{d}\varphi$, und $\vec{B}_1(z = 0) = (0, 0, 2I_1/(c(d-x)))$

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\int\mathrm{d}\varphi\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{d-x}\end{pmatrix}\\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\begin{pmatrix}\frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi}\\ \frac{\sin\varphi}{d-a\cos\varphi}\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\left[\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi} + \int_\pi^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi}\right]\\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}\frac{a}{d}\left[\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{1-\frac{a}{d}\cos\varphi} - \int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{1+\frac{a}{d}\cos\varphi}\right]\\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}\frac{a}{d}\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2}{d^2}}}\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{d^2}}-1}{-\frac{a}{d}}\times 2\\
&= \frac{4\pi}{c^2}I_1I_2\frac{d-\sqrt{d^2-a^2}}{\sqrt{d^2-a^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_y &\sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} + \int_\pi^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d - ax} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d + ax} = 2a \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d^2 + a^2x^2} = 0
\end{aligned}
$$

Hier wurde der Hinweis verwendet: $\int_0^\pi \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}-1}{\alpha}$ für $|\alpha| < 1$.

3.2 Impulsbilanz

Integrieren der Lorentzkraftdichte gibt

$$
\vec{F}^{\text{mech}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}^{\text{mech}} = \int_V \mathrm{d}^3r \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} \right).
$$

In Indexschreibweise:

$$
F_k^{\text{mech}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_k^{\text{mech}} = \int_V \mathrm{d}^3r \left(\rho E_k + \frac{1}{c}\varepsilon_{klm} j_l B_m \right).
$$

Aus den Maxwell-Gleichungen folgt (mit $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$)

$$
\rho = \frac{1}{4\pi}\partial_i E_i \quad \xrightarrow{E_k \cdot} \quad \rho E_k = \frac{1}{4\pi} E_k \left(\partial_i E_i\right)
$$

$$
0 = \frac{1}{4\pi}\partial_i B_i \quad \xrightarrow{B_k \cdot} \quad 0 = \frac{1}{4\pi} B_k \left(\partial_i B_i\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c} j_l = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{lpq}\partial_p B_q - \frac{1}{4\pi c}\dot{E}_l \quad \xrightarrow{\varepsilon_{klm} B_m} \quad \frac{1}{c}\varepsilon_{klm} j_l B_m &= \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{lpq}\left(\partial_p B_q\right) B_m - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{E}_l B_m \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\delta_{mp}\delta_{kq} - \delta_{mq}\delta_{kp}\right)\left(\partial_p B_q\right) B_m - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{E}_l B_m \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\left(\partial_p B_k\right) B_p - \left(\partial_k B_q\right) B_q\right) - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{E}_l B_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{lpq}\partial_p E_q + \frac{1}{4\pi c}\dot{B}_l \quad \xrightarrow{\varepsilon_{klm} E_m} \quad 0 &= \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{lpq}\left(\partial_p E_q\right) E_m + \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{B}_l E_m \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\left(\partial_p E_k\right) E_p - \left(\partial_k E_q\right) E_q\right) + \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{B}_l E_m \\
&= \ldots - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm} E_l \dot{B}_m
\end{aligned}
$$

Im letzten Term wurde $l \leftrightarrow m$ umbenannt. Diese vier Gleichungen addieren ergibt

$$
\begin{aligned}
\rho E_k + \frac{1}{c}\varepsilon_{klm} j_l B_m &= \frac{1}{4\pi} E_k \left(\partial_i E_i\right) + \frac{1}{4\pi} B_k \left(\partial_i B_i\right) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\left(\left(\partial_i B_k\right) B_i - \left(\partial_k B_q\right) B_q\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\left(\partial_i E_k\right) E_i - \left(\partial_k E_q\right) E_q\right) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}\dot{E}_l B_m - \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm} E_l \dot{B}_m \\
&= \partial_i \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(B_q B_q + E_q E_q\right)\right] - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm} E_l B_m
\end{aligned}
$$

wobei $\left(\partial_k B_q\right) B_q = \frac{1}{2}\left[\left(\partial_k B_q\right) B_q + B_q \left(\partial_k B_q\right)\right] = \frac{1}{2}\partial_k \left(B_q B_q\right) = \frac{1}{2}\partial_i \delta_{ik} B^2$ und analog für E verwendet wurde. Aus der letzten Gleichung lassen sich bereits die Komponenten des Spannungstensors und der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes herauslesen:

$$
T_{ik}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(B_q B_q + E_q E_q\right)\right]
$$

$$g_{em,k}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{klm}E_l B_m$$

Konvertieren des Volumen-Integrals über $\partial_i T_{ik}$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral

$$\int_V \mathrm{d}^3 r\, \partial_i T_{ik}(\vec{r},t) = \oint_{\partial V} \mathrm{d}^2 f_i\, T_{ik}(\vec{r},t)$$

und Identifikation von

$$P_k^{\text{feld}} = \int_V \mathrm{d}^3 r\, g_{em,k}(\vec{r},t)$$

liefert bereits das gewünschte Ergebnis.

3.3 Zylindermantelförmige Ausbuchtung auf leitender Ebene

Ansatz: Bildladung wird am Zylindermantel gespiegelt und ergibt eine Linienladung mit $x = a^2/d$. Diese beiden Linienladungen werden nun an der Ebene gespiegelt, und ergeben weitere Linienladungen mit $x = -a^2/d$ bzw. $x = -d$.

$\phi(x,y) = -\tau \log \frac{(x-d)^2+y^2}{R_0^2} + \tau \log \frac{(x+d)^2+y^2}{R_0^2} + \tau \log \frac{\left(x-\frac{a^2}{d}\right)^2+y^2}{\left(\frac{a}{d}R_0\right)^2} - \tau \log \frac{\left(x+\frac{a^2}{d}\right)^2+y^2}{\left(\frac{a}{d}R_0\right)^2}$

1) Ansatz erfüllt Differentialgleichung

$\Delta\phi(x,y) = -4\pi\tau\delta(x-d)\delta(y)$.

(Hier trägt nur der erste Term bei, die anderen liegen außerhalb des betrachteten Gebietes).

2a) Ansatz erfüllt die Randbedingungen: Auf der Ebene mit $x = 0$ gilt:

$\phi(0,y) = -\tau \log \frac{d^2+y^2}{R_0^2} + \tau \log \frac{d^2+y^2}{R_0^2} + \tau \log \frac{\frac{a^4}{d^2}+y^2}{\left(\frac{a}{d}R_0\right)^2} - \tau \log \frac{\frac{a^4}{d^2}+y^2}{\left(\frac{a}{d}R_0\right)^2} = 0.$

2b) Auf dem Zylindermantel mit $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ gilt:

$\phi(a\cos\varphi, a\sin\varphi) = -\tau \log \frac{(a\cos\varphi-d)^2+a^2\sin^2\varphi}{R_0^2} + \ldots$

$\quad = -\tau \log \frac{a^2+d^2-2ad\cos\varphi}{R_0^2} + \tau \log \frac{a^2+d^2+2ad\cos\varphi}{R_0^2} + \tau \log \frac{a^2+\frac{a^4}{d^2}-2\frac{a^3}{d}\cos\varphi}{\frac{a^2}{d^2}R_0^2} - \tau \log \frac{a^2+\frac{a^4}{d^2}+2\frac{a^3}{d}\cos\varphi}{\frac{a^2}{d^2}R_0^2}$

$\quad = -\tau \log \frac{a^2+d^2-2ad\cos\varphi}{R_0^2} + \tau \log \frac{a^2+d^2+2ad\cos\varphi}{R_0^2} + \tau \log \frac{d^2+a^2-2ad\cos\varphi}{R_0^2} - \tau \log \frac{d^2+a^2+2ad\cos\varphi}{R_0^2} = 0$

(Im Gegensatz zu oben heben sich hier erster und dritter Term bzw. zweiter und vierter gegenseitig weg).

3) Ansatz ist regulär für $x \to \infty$ bzw. $y \to \pm\infty$:

$\lim_{x\to\infty}\phi(x,y) = -\tau \lim_{x\to\infty} \log \frac{x^2}{x^2}\frac{x^2}{x^2} = -\tau \log 1 = 0$. Ebenso für $y \to \pm\infty$.

Lösung lautet also:

$\phi(x,y) = -\tau \log \frac{\left[(x-d)^2+y^2\right]\left[\left(x+\frac{a^2}{d}\right)^2+y^2\right]}{\left[(x+d)^2+y^2\right]\left[\left(x-\frac{a^2}{d}\right)^2+y^2\right]}$

b) Berechnung der influenzierten Ladungsdichte über $4\pi\sigma = E_R(R=a)$ und $E_R = -\partial\phi/\partial_R$. Flächenladungsverteilung:

$\sigma_A(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R=a}$

$\phi(R,\varphi) = -\tau \log \frac{R^2+d^2-2Rd\cos\varphi}{R_0^2} + [- \to +] + \tau \log \frac{R^2+\frac{a^4}{d^2}-2R\frac{a^2}{d}\cos\varphi}{\left(\frac{a}{d}R_0\right)^2} - [- \to +]$

$-\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R} = \tau \frac{2R-2d\cos\varphi}{R^2+d^2-2Rd\cos\varphi} - \left[\frac{- \to +}{- \to +}\right] - \tau \frac{2R\frac{d^2}{a^2}-2d\cos\varphi}{\frac{d^2}{a^2}R^2+a^2-2Rd\cos\varphi} + \left[\frac{- \to +}{- \to +}\right]$

$\sigma_A(\varphi) = \frac{\tau}{2\pi}\frac{a-d\cos\varphi}{a^2+d^2-2ad\cos\varphi} - \left[\frac{- \to +}{- \to +}\right] - \frac{\tau}{2\pi}\frac{\frac{d^2}{a}-d\cos\varphi}{d^2+a^2-2ad\cos\varphi} + \left[\frac{- \to +}{- \to +}\right]$

$\sigma_A(\varphi) = -\frac{\tau}{2\pi}\frac{d^2-a^2}{a}\left[\frac{1}{a^2+d^2-2ad\cos\varphi} - \frac{1}{a^2+d^2+2ad\cos\varphi}\right]$

Ladung pro Längeneinheit in z-Richtung $df = a\,d\varphi\,dz$; $\int_{z_0}^{z_0+1} dz = 1$:

$\tau_A := a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_A(\varphi)d\varphi = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_A(\varphi)d\varphi$

$= -\frac{\tau}{\pi}\left(d^2-a^2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{1}{a^2+d^2-2ad\cos\varphi} - \frac{1}{a^2+d^2+2ad\cos\varphi}\right]$

$= -\frac{\tau}{\pi}\frac{d^2-a^2}{d^2+a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{1}{1-\frac{2ad}{a^2+d^2}\cos\varphi} - \frac{1}{1+\frac{2ad}{a^2+d^2}\cos\varphi}\right]$

Verwendung der Formel (im Gültigkeitsbereich, da $A = \frac{2ad}{a^2+d^2} > 0$ und $1 - A = \frac{a^2+d^2-2ad}{a^2+d^2} = \frac{(a-d)^2}{a^2+d^2} > 0$)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+A\cos\varphi} = \frac{2\arcsin A}{\sqrt{1-A^2}}$.

$1 + A = \frac{a^2+d^2+2ad}{a^2+d^2} = \frac{(a+d)^2}{a^2+d^2}$

$1 - A^2 = (1+A)(1-A) = \frac{\left(d^2-a^2\right)^2}{(d^2+a^2)^2}$

$\sqrt{1-A^2} = \frac{d^2-a^2}{d^2+a^2}$

$\rightarrow \tau_A = -\frac{\tau}{\pi}\frac{d^2-a^2}{d^2+a^2}\frac{d^2+a^2}{d^2-a^2} 2\arcsin\frac{2ad}{d^2+a^2}$

$\tau_A = -\frac{2\tau}{\pi}\arcsin\frac{2ad}{d^2+a^2}$.

Mit $\arcsin A = \arctan\frac{A}{\sqrt{1-A^2}}$ und $\frac{A}{\sqrt{1-A^2}} = \frac{2ad}{d^2-a^2}$folgt:

$\tau_A = -\frac{2\tau}{\pi}\arcsin\frac{2ad}{d^2-a^2}$.

Flächenladungsverteilung:

$\sigma_E(y) =\text{-}\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0}$

$\phi(x,y) = -\tau\log\frac{(x-d)^2+y^2}{R_0^2} + [+] + \tau\log\frac{\left(x-\frac{a^2}{d}\right)^2+y^2}{\left(\frac{a}{d}R_0\right)^2} - [+]$

$-\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = \tau\frac{2(x-d)}{(x-d)^2+y^2} - [+] - \tau\frac{2\left(x\frac{d}{a}-a\right)\frac{d}{a}}{\left(x\frac{d}{a}-a\right)^2+\frac{d^2}{a^2}y^2} + [+]$

$-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0} = -\tau\frac{2d}{d^2+y^2} - \tau\frac{2d}{d^2+y^2} + \tau\frac{2\frac{a^2}{d}}{\frac{a^4}{d^2}+y^2} + \tau\frac{2\frac{a^2}{d}}{\frac{a^4}{d^2}+y^2}$

$\sigma_E(y) = -\frac{\tau}{\pi}\left[\frac{d}{d^2+y^2} - \frac{\frac{a^2}{d}}{\frac{a^4}{d^2}+y^2}\right]$

Ladung pro Längeneinheit in z-Richtung:

$\tau_E = \int_{-\infty}^{-a}\sigma_E(y)dy + \int_a^{\infty}\sigma_E(y)dy = 2\int_a^{\infty}\sigma_E(y)dy$

$\tau_E = -\frac{2\tau}{\pi}\int_a^{\infty} dy\left[\frac{d}{d^2+y^2} - \frac{\frac{a^2}{d}}{\frac{a^4}{d^2}+y^2}\right]$

$\tau_E = -\frac{2\tau}{\pi}\left.\left[\arctan\frac{y}{d} - \arctan\frac{yd}{a^2}\right]\right|_a^{+\infty} = -\frac{\tau}{\pi}\left[-\arctan\frac{a}{d} + \arctan\frac{d}{a}\right]$

$\tau_E = -\frac{\tau}{\pi}\arctan\frac{\frac{d}{a}-\frac{a}{d}}{1+\frac{d}{a}\frac{a}{d}} = -\frac{\tau}{\pi}\arctan\frac{d^2-a^2}{2ad}$

Summe der Ladungen pro Längeneinheit:

$$\tau_A + \tau_E = -\frac{2\tau}{\pi}\left[\underbrace{\arctan\frac{2ad}{d^2-a^2} + \arctan\frac{d^2-a^2}{2ad}}_{\frac{\pi}{2}}\right] = -\tau$$