4. Tutorium - Lösungen **27.04.2012**

4.1 Zylinder mit exzentrischer Längsbohrung

a) Laplace Operator und Gradient in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \qquad \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z,$$

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases}\rho_0 & r \le R_0\\ 0 & r > R_0.\end{cases}$$

Durchführung der ersten Integration von $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -4\pi\rho(\vec{r})$:

$$r\frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases}-2\pi\rho_0 r^2 + C_1 & r \le R_0\\ C_2 & r > R_0\end{cases}$$

mit $-2\pi\rho_0 R_0^2 + C_1 = C_2$ (Stetigkeitsbedingung bei $r = R_0$). Die zweite Integration ergibt

$$\phi = \begin{cases}-\pi\rho_0 r^2 + C_1\ln r + C_3 & r \le R_0\\ C_2\ln r + C_4 & r > R_0\end{cases}$$

mit $-\pi\rho_0 R_0^2 + C_1\ln R_0 + C_3 = C_2\ln R_0 + C_4$. Davon abgeleitet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\vec{e}_r\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial r} = \vec{e}_r\begin{cases}+2\pi\rho_0 r - \frac{C_1}{r} & r \le R_0\\ -\frac{C_2}{r} & r > R_0.\end{cases}$$

Um $\vec{E}(0,0,z) = 0$ zu erhalten (was aus Symmetriegründen folgt), muss $C_1 = 0$ sein (d.h. $\phi(0,0,z)$ ist endlich entlang der Zylinderachse). Daraus folgt $C_2 = -2\pi\rho_0 R_0^2$. C_3 ist beliebig und C_4 folgt aus der zweiten Stetigkeitsbedingung, also

$$\phi = \begin{cases}-\pi\rho_0 r^2 + C_3 & r \le R_0\\ -2\pi\rho_0 R_0^2\ln\frac{r}{R_0} - \pi\rho_0 R_0^2 + C_3 & r > R_0\end{cases} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_r\begin{cases}2\pi\rho_0 r & r \le R_0\\ 2\pi\rho_0\frac{R_0^2}{r} & r > R_0.\end{cases}$$

b) Anwendung des Superpositionsprinzips, z.B. Verlegung des Lochs in $\vec{e}_x$-Richtung:

$$\begin{aligned}\phi_1(x,y,z) &= -\pi\rho_0\left(x^2+y^2\right),\\ \phi_2(x,y,z) &= +\pi\rho_0\left((x-a)^2+y^2\right).\end{aligned}$$

Addieren: $\phi(x,y,z) = \phi_1(x,y,z) + \phi_2(x,y,z) = \pi\rho_0\left(a^2 - 2ax\right)$. Berechnung von $\vec{\nabla}$ in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix}2a\pi\rho_0\\0\\0\end{pmatrix} = 2a\pi\rho_0\vec{e}_x = 2\vec{a}\pi\rho_0.$$

4.2 Dirichlet-Randwertaufgabe im Halbraum

Die angegebene Dirichlet-Green-Funktion verschwindet am Rand des betrachteten Halbraumes: $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r}'$ auf ∂V, also für $z' = 0$ und für $\vec{r}'$ im Unendlichen (natürliche Randbedingungen).
Für eine Dirichlet-Green-Funktion lässt sich das Potential schreiben als (siehe Vorlesung)

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, G_D(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} d^2\vec{f}' \cdot \underbrace{\phi(\vec{r}')}_{\text{Randbedingung}} \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}').$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, G_D(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi}\int_{z'=0} dx'\, dy'\, (-\vec{e}_z) \cdot \phi(\vec{r}')\vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}').$$

Mit

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

erhält man

$$\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \partial_{z'} G_D(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{z'-z}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}} + \frac{z'+z}{\left[... + (z+z')^2\right]^{3/2}}.$$

Die Ladungsverteilung ist gegeben durch $\rho(\vec{r}') = q\delta^3(\vec{r}' - d\vec{e}_z) = q\delta(x')\delta(y')\delta(z'-d)$.
Übergang zu Zylinderkoordinaten $R^2 = x'^2 + y'^2$ und $dx'\, dy' = 2\pi R\, dR$ liefert

$$\phi|_{x=y=0} = \int_V d^3r'\, G_D(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi}\underbrace{\int dx'\, dy'\, \phi(x', y', 0)}_{2\pi\int_0^a R\, dR \cdot V}\frac{2z}{[\underbrace{x'^2 + y'^2}_{R^2} + z^2]^{3/2}}.$$

Auswertung des Integrals im 2. Term:

$$\int_0^a \underbrace{RdR}_{\frac{1}{2}dR^2}\frac{1}{[R^2+z^2]^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{2}}\left.\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right|_{R^2=0}^{a^2} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}}.$$

$$\to \phi|_{x=y=0} = \frac{q}{|z-d|} - \frac{q}{|z+d|} + V\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right), \text{ für } z > 0.$$

4.3 Multipolmomente homogen geladener Ostereier

a)
Elektrostatisches Potential über Kugelflächenfunktionen:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}q_{lm}^*, \qquad \text{mit } q_{lm} = \int \mathrm{d}^3r'\, r'^l Y_{lm}(\vartheta', \varphi')\rho(\vec{r}').$$

Multipolmomente mit negativem m lassen sich berechnen über $q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*$, was direkt von der entsprechenden Relation der Y_{lm} folgt.
Da das System rotationssymmetrisch um die z-Achse ist, fallen alle Y_{lm} die φ enthalten weg:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} e^{2i\varphi}\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Also $q_{11} = q_{22} = q_{21} = 0$. Da $Y_{10} \sim \cos\vartheta = z/r$ ungerade bezüglich z ist, aber das Ellipsoid symmetrisch entlang der z-Achse, verschwindet das entsprechende Integral, daher auch q_{10}. Das sieht man auch über

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\vartheta)\cos\vartheta = 0.$$

Bleiben also nur q_{00} und q_{20} zu berechnen.

$$\begin{aligned}
q_{00} &= \int \mathrm{d}^3r\, r^0 Y_{00}(\vartheta,\varphi)\rho(\vec{r}) \\
&= \int \mathrm{d}^3r \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\frac{4\pi}{3}a^2 c\rho_0.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde das Volumen des Ellipsoids eingesetzt. Man kann es über die angegebene Variablentransformation erhalten:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a} = \tilde{r}\sin\tilde{\vartheta}\cos\tilde{\varphi}, \qquad \tilde{y} = \frac{y}{a} = \tilde{r}\sin\tilde{\vartheta}\sin\tilde{\varphi}, \qquad \tilde{z} = \frac{z}{c} = \tilde{r}\cos\tilde{\vartheta}.$$

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3r\,\rho(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\rho(\vec{r}) = a^2 c\int \mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{y}\mathrm{d}\tilde{z}\,\rho(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = a^2 c\int_0^1 \tilde{r}^2\mathrm{d}\tilde{r}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\tilde{\varphi}\rho_0 \\
&= a^2 c\frac{1}{3}\times 2\times 2\pi = \frac{4\pi}{3}a^2 c.
\end{aligned}$$

Berechnung von q_{20} erfolgt analog:

$$\begin{aligned}
q_{20} &= \int \mathrm{d}^3r\, r^2 Y_{20}(\vartheta,\varphi)\rho(\vec{r}) \\
&= \int \mathrm{d}^3r\, r^2\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)\rho(\vec{r}) \\
&= \int \mathrm{d}^3r\, r^2\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{3z^2 - r^2}{r^2}\rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int \mathrm{d}^3r\,\left(3z^2 - r^2\right)\rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}a^2 c\int_0^1 \tilde{r}^2\mathrm{d}\tilde{r}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\tilde{\varphi}\left[3c^2\tilde{r}^2\cos^2\tilde{\vartheta} - a^2\tilde{r}^2\left(1-\cos^2\tilde{\vartheta}\right) - c^2\tilde{r}^2\cos^2\tilde{\vartheta}\right]\rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}a^2 c\int_0^1 \tilde{r}^4\mathrm{d}\tilde{r}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})2\pi\left[\left(2c^2 + a^2\right)\cos^2\tilde{\vartheta} - a^2\right]\rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}a^2 c\frac{1}{5}2\pi\left[\left(2c^2 + a^2\right)\frac{2}{3} - 2a^2\right]\rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{4\pi}{3}a^2 c\rho_0\frac{2}{5}\left(c^2 - a^2\right).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2\left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2\right) + c^2\tilde{z}^2 = a^2\tilde{r}^2\sin^2\tilde{\vartheta} + c^2\tilde{r}^2\cos^2\tilde{\vartheta} = a^2\tilde{r}^2\left(1-\cos^2\tilde{\vartheta}\right) + c^2\tilde{r}^2\cos^2\tilde{\vartheta}$$

Das Potential kann dann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= 4\pi\frac{Y_{00}(\vartheta,\varphi)}{r}q_{00}^* + \frac{4\pi}{5}\frac{Y_{20}(\vartheta,\varphi)}{r^3}q_{20}^* \\
&= 4\pi\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\frac{4\pi}{3}a^2 c\rho_0 + \frac{4\pi}{5}\frac{1}{r^3}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{4\pi}{3}a^2 c\rho_0\frac{2}{5}\left(c^2 - a^2\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}a^2 c\rho_0\left(\frac{1}{r} + \frac{c^2 - a^2}{10}\frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3}\right).
\end{aligned}$$

b) Für das zweite Ellipsoid gilt $q_{00} = 0$, da sich die positiven und negativen Ladungen integriert gegenseitig aufheben. Bleiben also nur Dipolmomente. Weiters folgt $q_{11} = 0$ aufgrund der Rotationssymmetrie um φ. Bleibt q_{10} zu berechnen:

$$\begin{aligned}
q_{10} &= \int \mathrm{d}^3r\, r Y_{10}(\vartheta,\varphi)\rho(\vec{r}) \\
&= \int \mathrm{d}^3r\, r\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int \mathrm{d}^3r\, z\rho(\vec{r}) \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}a^2c\int_0^1 \tilde{r}^2\mathrm{d}\tilde{r}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\tilde{\varphi}\left[\int_{-1}^0 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})c\tilde{r}\cos\tilde{\vartheta}(-\rho_0) + \int_0^1 \mathrm{d}(\cos\tilde{\vartheta})c\tilde{r}\cos\tilde{\vartheta}(+\rho_0)\right] \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}a^2c\int_0^1 \tilde{r}^3\mathrm{d}\tilde{r}2\pi c\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]\rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}a^2c\,\frac{1}{4}2\pi c\rho_0 \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie um den Winkel φ verwinden auch $q_{21} = q_{22} = 0$. Weiters verschwindet $q_{20} = 0$, weil $Y_{20} \sim (3\cos^2\vartheta - 1)$ gerade in $\cos\vartheta$ ist, aber die Ladungsverteilung $\rho(\vartheta)$ ungerade. Das Potential des Dipols lautet:

$$\begin{aligned}
\phi^{(b)}(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{3}\frac{Y_{10}(\vartheta,\varphi)}{r^2}q_{10}^* \\
&= \frac{4\pi}{3}\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0 \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\cos\vartheta.
\end{aligned}$$

c) In großen Entfernungen wirkt das erste Ellipsoid wie ein elektrischer Monopol, also wie eine Punktladung mit Gesamtladung $Q = 4\pi a^2c\rho_0/3$, und das zweite Ellipsoid wie ein elektrischer Dipol. Zu untersuchen ist also die Wirkung eines elektrischen Dipolfeldes auf eine Punktladung. Wegen $\vec{F} = q\vec{E}$ genügt es, das elektrische Feld zu kennen. Dieses ist über $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ berechenbar.

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Man erhält dann:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi \\
&= -\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\cos\vartheta \\
&= -\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\left(\vec{e}_r\frac{-2}{r^3}\cos\vartheta + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r^3}(-\sin\vartheta) + \vec{e}_\varphi 0\right) \\
&= \frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{1}{r^3}\left(2\vec{e}_r\cos\vartheta + \vec{e}_\vartheta\sin\vartheta\right) \\
&= \frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{1}{r^5}\begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{3\left(\vec{e}_z\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{e}_z}{r^5},
\end{aligned}$$

wobei die letzten vier Zeilen verschiedene Varianten des Endergebnisses sind. Hierbei wurden die Einheitsvektoren verwendet:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Kraft ergibt sich aus $\vec{F} = Q\vec{E}$ mit $Q = 4\pi a^2 c\rho_0/3$:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= Q\vec{E} \\
&= \frac{4\pi a^2 c\rho_0}{3}\frac{\pi}{2}a^2c^2\rho_0\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2\pi^2a^4c^3\rho_0^2}{3r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{8}Q^2c\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{8}Q^2c\begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix}\frac{1}{r^5} \\
&= \frac{3}{8}Q^2c\frac{3\left(\vec{e}_z\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{e}_z}{r^5}
\end{aligned}$$

wobei das Ergebnis in verschiedenen möglichen Varianten aufgeschrieben wurde.
d) Man kann sich überlegen:
q_{00}, q_{10}, q_{20} verschwinden aufgrund der φ-Integration $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho_0\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-\rho_0)\mathrm{d}\varphi = \pi\rho_0 - \pi\rho_0 = 0$. q_{22} verschwindet ebenfalls aufgrund der φ-Integration, da die Integrationen über die Intervalle $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{2i\varphi}\rho_0\mathrm{d}\varphi = 0$ und $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}e^{2i\varphi}(-\rho_0)\mathrm{d}\varphi = 0$ separat verschwinden. q_{21} verschwindet aufgrund der ϑ-Integration in jedem Ladungsbereich separat, da der Integrand als Funktion von ϑ ungerade ist. Die einzige nicht-verschwindende Komponenten bleibt demnach $q_{11} = -q_{1,-1}^*$.