5. Tutorium - Lösungen **04.05.2012**

5.1 Kreisförmige Plattenkondensatoren

a) Wegen $d \ll R_0$ können Randeffekte vernachlässigt werden: $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ besitzen nur eine z-Komponente, σ, σ_P sind homogen auf den Metallplatten, ρ_P hängt nur von z ab.
Freie Flächenladungen bei $z = 0$ und $z = d$: $\sigma(z = d) = Q/(\pi R_0^2)$, $\sigma(z = 0) = -Q/(\pi R_0^2)$.
Es ist zweckmäßig, zuerst $\vec{D}$ zu berechnen: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma$, $\mathrm{div}\vec{D} = \partial_z D_z(z) = 4\pi\rho = 0$ innen und außen. $\Rightarrow$ $\vec{D}$-Feld ist im Dielektrikum homogen. Obere Platte: $\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{D}_a}_{0} - \underbrace{\vec{D}_i}_{D_z}) = 4\pi\sigma = 4Q/R_0^2 \Rightarrow$
$\vec{D}(\vec{r}) = -4Q/R_0^2\vec{e}_z$ im Dielektrikum.
$\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\vec{e}_z$ mit $E_z(z) = D_z/\epsilon(z)$, $\vec{P}(\vec{r}) = P_z(z)\vec{e}_z$, $P_z(z) = \chi_e E_z(z) = \frac{\epsilon-1}{4\pi}E_z(z) = \frac{1}{4\pi}(1 - \frac{1}{\epsilon})D_z$

$$\Rightarrow E_z(z) = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}, \qquad P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}\right).$$

b) Freie Flächenladungsdichte σ: siehe (a).
Polarisations-Flächenladungsdichte $\sigma_P = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{P}_a}_{0} - \underbrace{\vec{P}_i}_{P_z(d)})$

$$\Rightarrow \sigma_P(z = d) = P_z(d) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}\right), \qquad \sigma_P(z = 0) = -P_z(d) = \frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0}\right).$$

Polarisationsraumladungsdichte: $\rho_P(z) = -\mathrm{div}\vec{P} = -\partial_z P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2 d}\frac{\Delta\epsilon}{\left(\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}\right)^2}$ im Dielektrikum.

5.2 Maxwellscher Spannungstensor

Eine ruhende Punktladung q befinde sich in einem homogenen elektrostatischen Feld $\vec{E}^{(\mathrm{ex})}$, welches von Quellen im Unendlichen erzeugt wird. Nach dem Kraftgesetz von Lorentz wirkt dann auf die Punktladung die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}^{(\mathrm{ex})}$. Leite diese Formel für die Kraft auf die Punktladung mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors her.
Anleitung: Wähle den Ort der Punktladung als Ursprung und die Richtung von $\vec{E}^{(\mathrm{ex})}$ als z-Richtung. Beachte, dass in den Maxwellschen Spannungstensor die Komponenten des Gesamtfeldes eingehen! Wähle als geschlossene Oberfläche eine Kugel mit Radius r um den Ursprung.
Gesamtfeld: $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \vec{E}^{(\mathrm{ex})}$ mit $\vec{E}^{(\mathrm{ex})} = (0, 0, E^{(\mathrm{ex})})$, bzw. $E_i = \frac{qx_i}{r^3} + E^{(\mathrm{ex})}\delta_{i3}$.
$F_j = \oint_{\partial V}(\mathrm{d}^2\vec{f})_i T_{ij}$ mit $(\mathrm{d}^2\vec{f})_i = n_i \mathrm{d}^2 f = n_i r^2 \mathrm{d}\Omega$, $n_i = \frac{x_i}{r}$, $T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right)$.
$F_j = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega\underbrace{(rx_iE_iE_j - \frac{1}{2}rx_jE^2)}_{=:I_j}$

$$\begin{aligned}
I_j &= rx_i\left(\frac{qx_i}{r^3} + E^{(\mathrm{ex})}\delta_{i3}\right)\left(\frac{qx_j}{r^3} + E^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}\right) - \frac{1}{2}rx_j\left(\frac{q^2r^2}{r^6} + 2\frac{qx_3}{r^3}E^{(\mathrm{ex})} + E^{(\mathrm{ex})2}\right)\\
&= rx_i\frac{qx_i}{r^3}\frac{qx_j}{r^3} + rx_iE^{(\mathrm{ex})}\delta_{i3}\frac{qx_j}{r^3} + rx_i\frac{qx_i}{r^3}E^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3} + rx_iE^{(\mathrm{ex})}\delta_{i3}E^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}\\
&\quad -\frac{1}{2}rx_j\frac{q^2r^2}{r^6} - \frac{1}{2}rx_j2\frac{qx_3}{r^3}E^{(\mathrm{ex})} - \frac{1}{2}rx_jE^{(\mathrm{ex})2}\\
&= \frac{q^2}{r^3}x_j + x_3E^{(\mathrm{ex})}\frac{qx_j}{r^2} + qE^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3} + rx_3E^{(\mathrm{ex})2}\delta_{j3} - \frac{1}{2}x_j\frac{q^2}{r^3} - x_j\frac{qx_3}{r^2}E^{(\mathrm{ex})} - \frac{1}{2}rx_jE^{(\mathrm{ex})2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{q^2x_j}{r^3} + qE^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3} + rx_3E^{(\mathrm{ex})2}\delta_{j3} - \frac{1}{2}rx_jE^{(\mathrm{ex})2}
\end{aligned}$$

Bei der Integration $\int_{4\pi} \mathrm{d}\Omega I_j$ fallen alle Terme $\propto x_j$ oder $\propto x_3$ weg, da $\int_{4\pi} \mathrm{d}\Omega x_k = 0$ (kann man explizit zeigen durch Einsetzen von $x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $x_3 = r\cos\vartheta$).
Daher bleibt $F_j = qE^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}\mathrm{d}\Omega = qE^{(\mathrm{ex})}\delta_{j3}$, oder $\vec{F} = q\vec{E}^{(\mathrm{ex})}$.

5.3 Zylinderförmiger Isolator

a) Im Inneren des Zylinders $R < a$ hat man $\rho_P(\vec{r}) = -\mathrm{div}\vec{P}(\vec{r}) = -\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(RP_R(R)) = -\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(P_0\frac{R^2}{a}\right) = -\frac{2P_0}{a} =: \rho_0$.
Am Rand des Zylinders $R = a$ gilt: $\sigma_P = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n}\cdot(\underbrace{\vec{P}_{\mathrm{a}}}_{0} - \vec{P}_{\mathrm{i}}) = +P_R(R \to a) = P_0 =: \sigma_0$.
Gesamtladung pro Längeneinheit: $q_P = \pi a^2 \cdot 1 \cdot \rho_0 + 2\pi a \cdot 1 \cdot \sigma_0 = \pi a^2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{2P_0}{a}\right) + 2\pi a \cdot 1 \cdot P_0 = 0$.
b) Lösungsweg 1: über das $\vec{E}$ Feld
$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi(\underbrace{\rho(\vec{r})}_{0} + \rho_P(\vec{r}))$, $\quad \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$.
Aus Symmetriegründen: $\vec{E}(\vec{r}) = E_R(R)\vec{e}_R$.
Im Inneren gilt (Integration über Zylinder Z_R mit Radius R):
$\int_{F(Z_R)} \vec{E}\cdot d\vec{f} = 4\pi\int_{Z_R}\rho_P(\vec{r})d^3r$,
mit $\vec{E} = E_R(R)\vec{e}_R$ und $d\vec{f} = Rd\varphi dz\vec{e}_R$ erhält man:

$$2\pi \cdot 1 \cdot E_R(R)R = 4\pi\int_{Z_R}\rho_P(\vec{r})d^3r = \begin{cases} 4\pi\cdot\pi R^2\cdot 1\cdot\rho_0 & \text{für } R < a, \\ 0 & \text{für } R > a. \end{cases}$$

$$\to E_R = \begin{cases} -4\pi P_0\frac{R}{a} & \text{für } R < a, \\ 0 & \text{für } R > a. \end{cases}$$

Daraus folgt $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi\vec{P}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) & \text{für } R < a, \\ \vec{0} + \vec{0} & \text{für } R > a. \end{cases}$

$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{0}$ innen und außen.
Lösungsweg 2: über das $\vec{D}$ Feld
$R < a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0$, $\quad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \underbrace{\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$
$R > a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0$, $\quad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ (auch keine Quellen und Wirbel von $\vec{D}$ im Unendlichen)
$R = a$: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma = 0$, $\quad \mathrm{Rot}\vec{D} = \underbrace{\mathrm{Rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{Rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ im ganzen Raum} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) - 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = -4\pi\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi P_0\frac{R}{a}\vec{e}_R & \text{für } R < a, \\ \vec{0} & \text{für } R > a. \end{cases}$$