6. Tutorium - Lösungen **11.05.2012**

6.1 Kapazität kreisförmiger Plattenkondensatoren

Aus Beispiel 5.1: $E_z(z) = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}$.
Kapazität $C = Q/U$ mit $U = \phi(z=d) - \phi(z=0)$. Mit $\vec{E} = -\text{grad}\phi = -\partial_z\phi(z)\vec{e}_z \Rightarrow$

$$\phi(d) - \phi(0) = -\int_0^d E_z(z)\mathrm{d}z = \int_0^d \frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}\mathrm{d}z = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{d}{\Delta\epsilon}\ln\left(\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}\right)\bigg|_0^d = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{d}{\Delta\epsilon}\ln\left(\frac{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right).$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{R_0^2}{4d}\frac{-\Delta\epsilon}{\ln\left(1 - \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right)} = \frac{R_0^2}{4d}\frac{\Delta\epsilon}{\ln\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}\right)}.$$

6.2 Geteilter Kreiszylinder

a) Für $R < a$ und $R > a$ ist zu lösen: $\Delta\phi(R,\varphi) = 0$.
Ansatz für $R < a$: $\phi(R,\varphi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi\right]\left(\frac{R}{a}\right)^m$.
Wegen vorgegebenem Potential auf den Zylinderhälften muss $\phi(a,-\varphi) = -\phi(a,\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, gelten:
$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cos m\varphi - B_m\sin m\varphi\right] = -A_0 - \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi\right]$.
Da das für alle φ gelten muss, folgt: $A_0 = 0$, $A_m = 0$ für $m \geq 1$.
Wegen der Spiegelsymmetrie entlang der y-Achse gilt außerdem $\phi(a,\varphi) = \phi(a,\pi-\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, also
$B_m\sin m\varphi = B_m\sin m(\pi - \varphi) = -(-1)^m B_m\sin m\varphi$, also $B_m = 0$ für $m = 2,4,6,...$
Bleiben nur die ungeraden Koeffizienten B_{2n+1} übrig, die zu bestimmen sind.
Randbedingungen: $\phi(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}\sin(2n+1)\varphi = \begin{cases} +\phi_0 & \text{für } 0 < \varphi < \pi, \\ -\phi_0 & \text{für } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$
Berechnung über Orthogonalität der Fourierschen Eigenfunktionen:
$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\sin\left[(2n'+1)\varphi\right]\phi(a,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\sin\left[(2n'+1)\varphi\right]\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\sin\left[(2n+1)\varphi\right]$

$$\frac{1}{\pi}\phi_0\underbrace{\int_0^{\pi}d\varphi\sin\left[(2n'+1)\varphi\right]}_{\frac{2}{2n'+1}} - \frac{1}{\pi}\phi_0\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}d\varphi\sin\left[(2n'+1)\varphi\right]}_{-\frac{2}{2n'+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\sin\left[(2n'+1)\varphi\right]\sin\left[(2n+1)\varphi\right]}_{\delta_{nn'}}$$

$\frac{1}{\pi}\frac{4}{2n'+1}\phi_0 = B_{2n'+1}$.
Analog für $R > a$, daher ist die Gesamtlösung:
$\phi(R,\varphi) = \frac{4\phi_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}\cdot\begin{cases}\left(\frac{R}{a}\right)^{2n+1} & \text{für } R \leq a, \\ \left(\frac{a}{R}\right)^{2n+1} & \text{für } R \geq a.\end{cases}$
Mit den Formeln aus der Angabe folgt:
$\phi(R,\varphi) = \frac{2\phi_0}{\pi}\cdot\begin{cases}\arctan\frac{2aR\sin\varphi}{a^2-R^2} & \text{für } R \leq a, \\ \arctan\frac{2aR\sin\varphi}{R^2-a^2} & \text{für } R \geq a.\end{cases}$
b) $\text{Div}\vec{E} = (E_n)_a - (E_n)_i = E_R(R\downarrow a,\varphi) - E_R(R\uparrow a,\varphi) = -\left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R\downarrow a} + \left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R\uparrow a} = 4\pi\sigma(\varphi)$.
$R > a$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial R} = \frac{2\phi_0}{\pi}\frac{1}{1+\frac{4a^2R^2\sin^2\varphi}{(R^2-a^2)^2}}\left[\underbrace{\frac{2a\sin\varphi}{R^2-a^2} - \frac{4aR^2\sin\varphi}{(R^2-a^2)^2}}_{\frac{2a\sin\varphi}{(R^2-a^2)^2}\left[\underbrace{R^2-a^2-2R^2}_{-(a^2+R^2)}\right]}\right] = -\frac{4\phi_0}{\pi}\frac{a\left(a^2+R^2\right)\sin\varphi}{(R^2-a^2)+4a^2R^2\sin^2\varphi}.$$

$-\left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R\downarrow a} = \frac{4\phi_0}{\pi}\frac{2a^3\sin\varphi}{4a^4\sin^2\varphi} = \frac{2\phi_0}{a\pi}\frac{1}{\sin\varphi}$.

Analog für $R < a$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial R} = \frac{2\phi_0}{\pi}\frac{1}{1+\frac{4a^2R^2\sin^2\varphi}{(a^2-R^2)^2}}\left[\underbrace{\frac{2a\sin\varphi}{a^2-R^2}+\frac{4aR^2\sin\varphi}{(a^2-R^2)^2}}_{\frac{2a\sin\varphi}{(a^2-R^2)^2}\left[\underbrace{a^2-R^2+2R^2}_{(a^2+R^2)}\right]}\right] = \frac{4\phi_0}{\pi}\frac{a\left(a^2+R^2\right)\sin\varphi}{(a^2-R^2)+4a^2R^2\sin^2\varphi}.$$

$$\left.\frac{\partial\phi(R,\varphi)}{\partial R}\right|_{R\uparrow a} = \frac{2\phi_0}{a\pi}\frac{1}{\sin\varphi}.$$

In Summe: $\sigma(\varphi) = \frac{\phi_0}{a\pi^2}\frac{1}{\sin\varphi}$.

Anmerkung: $\sigma(\varphi)$ divergiert für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, weshalb bei Punkt (c) der Spalt nicht ignoriert werden kann.

c) Ladung τ_1 pro Längeneinheit auf der Zylinderhälfte 1 ($0 < \varphi < \pi$):

(Da $d \ll a$ gilt $a\sin\varphi \approx a\varphi \approx \frac{d}{2}$ für das Spaltende.)

$$\tau_1 \approx a\int_{\frac{d}{2a}}^{\pi-\frac{d}{2a}} d\varphi\,\sigma(\varphi) = \frac{\phi_0}{\pi^2}\int_{\frac{d}{2a}}^{\pi-\frac{d}{2a}}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

Formel für das Integral: $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right|$.

$$\tau_1 \approx \frac{\phi_0}{\pi^2}\left[\log\underbrace{\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{d}{4a}\right)\right|}_{\left|\cot\frac{d}{4a}\right|\approx\frac{4a}{d}} - \log\underbrace{\left|\tan\frac{d}{4a}\right|}_{\approx\frac{d}{4a}}\right] = \frac{2\phi_0}{\pi^2}\log\frac{4a}{d} := \tau.$$

Analog für $\pi < \varphi < 2\pi$:

$$\tau_2 \approx a\int_{\pi+\frac{d}{2a}}^{2\pi-\frac{d}{2a}} d\varphi\,\sigma(\varphi) = \frac{\phi_0}{\pi^2}\int_{\pi+\frac{d}{2a}}^{2\pi-\frac{d}{2a}}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{\phi_0}{\pi^2}\left[\log\underbrace{\left|\tan\left(\pi-\frac{d}{4a}\right)\right|}_{\left|\tan\frac{d}{4a}\right|\approx\frac{d}{4a}} - \log\underbrace{\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{d}{4a}\right)\right|}_{\left|\cot\frac{d}{4a}\right|\approx\frac{4a}{d}}\right] = -\frac{2\phi_0}{\pi^2}\log\frac{4a}{d} = -\tau.$$

Kapazität pro Längeneinheit:

$$C = \frac{\tau}{\phi_0-(-\phi_0)} = \frac{\tau}{2\phi_0} = \frac{2}{\pi^2}\log\frac{4a}{d}.$$

6.3 Feld zwischen unendlich langen Leitern mit sichelförmigem Querschnitt

Für die Berechnung von $\vec{B}$ wird am einfachsten die Integralform des Oerstedschen Gesetzes angewendet. Im Inneren eines Zylinders gilt: $\oint_{\partial F}\vec{B}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_F\vec{j}(\vec{r})\mathrm{d}^2\vec{f}$. Aus Symmetriegründen: $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$.

$2\pi rB(r) = \frac{4\pi}{c}j_0r^2\pi \;\Rightarrow B(r) = \frac{2\pi}{c}j_0r, \quad \vec{B} = \frac{2\pi}{c}j_0(-y,x,0)$.

Superposition von zwei Zylindern mit Strömen in entgegengesetzter Richtung: $\vec{B}(x,y) = \frac{2\pi}{c}j_0(-y,x-a,0) - \frac{2\pi}{c}j_0(-y,x+a,0) = -\frac{4\pi}{c}aj_0\vec{e}_y$.