7. Tutorium - Lösungen **25.05.2012**

7.1 Permanent magnetisierter Zylinder

a) Im Inneren $r < a$ gilt: $\vec{j}_M(\vec{r}) = c\,\mathrm{rot}\vec{M}(\vec{r}) = c\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RM_\varphi(R)\right)\vec{e}_z$ mit $M_\varphi(R) = M_0\frac{R}{a}$. $\Rightarrow \vec{j}_M(\vec{r}) = 2M_0c\frac{1}{a}\vec{e}_z$.

Am Rand $r = a$ gilt: $\vec{k}_M = c\,\mathrm{Rot}\vec{M} = c\left(\vec{n}\times\underbrace{\vec{M}_a}_{\vec{0}}\right) - c\left(\underbrace{\vec{n}}_{\vec{e}_r}\times\underbrace{\vec{M}_i}_{M_0\vec{e}_\varphi}\right) = -M_0c\vec{e}_z$

Gesamtstrom: $2\pi\int_0^a \mathrm{d}R\,R2M_0c\frac{1}{a} + 2\pi a(-M_0c) = 2\pi M_0ca - 2\pi M_0ca = 0$.

b) Lösungsweg 1: Aus Symmetriegründen gilt $\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(R)\vec{e}_\varphi$.

Integrale Form des Oerstedschen Gesetzes: $\oint_{\partial F}\vec{B}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_F \vec{j}_M(\vec{r}\,')\cdot\mathrm{d}\vec{f}\,'$.

$$2\pi RB_\varphi(R) = \begin{cases}\frac{4\pi}{c}2M_0c\frac{1}{a}\pi R^2 & R < a\\ 0 & R > a\end{cases} \qquad B_\varphi(R) = \begin{cases}4\pi M_0\frac{R}{a} & R < a\\ 0 & R > a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases}4\pi\vec{M}(\vec{r}) - 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \vec{0}\\ \vec{0}-\vec{0} = \vec{0}\end{cases} \qquad \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ im ganzen Raum.}$$

Lösungsweg 2: $\vec{H}(\vec{r}) = 0$ kann man sich auch folgendermaßen überlegen:

Für $r < a$: $\mathrm{div}\vec{H} = \underbrace{\mathrm{div}\vec{B}}_{0} - 4\pi\underbrace{\mathrm{div}\vec{M}}_{0} = 0$, $\quad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \vec{0}$.

Für $r > a$: $\mathrm{div}\vec{H} = \mathrm{div}\vec{B} = 0$, $\quad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \vec{0}$. (auch keine Quellen / Wirbel im Unendlichen)

Für $r = a$: $\mathrm{Div}\vec{H} = \mathrm{Div}\vec{B} - 4\pi\mathrm{Div}\vec{M} = 0$, $\quad \mathrm{Rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{k} = \vec{0}$.

Daher muss gelten $\vec{H}(\vec{r}) = 0$, $\quad \vec{B}(\vec{r}) = 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases}4\pi M_0\frac{R}{a}\vec{e}_\varphi & R < a\\ \vec{0} & R > a\end{cases}$

7.2 Halbräume mit unterschiedlichen Permeabilitäten

a) Aus Symmetriegründen gilt $B_x(x,y)$, $B_y(x,y)$, $B_z = 0$.

Feldgleichungen für $\vec{B}$: Für Materie mit Materialgleichung $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r})$ gilt allgemein:

$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0$ und $\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$, also $\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}(\vec{r})$.

Somit gilt

$G_1:\ x > 0$: $\mathrm{div}\vec{B}(x,y) = 0$, $\quad \mathrm{rot}\vec{B}(x,y) = \frac{4\pi}{c}\mu_1I_1\delta(x-d)\delta(y)\vec{e}_z$.

$G_2:\ x < 0$: $\mathrm{div}\vec{B}(x,y) = 0$, $\quad \mathrm{rot}\vec{B}(x,y) = \frac{4\pi}{c}\mu_2I_2\delta(x+d)\delta(y)\vec{e}_z$.

Asymptotische Bedingung für $\vec{B}$: $\vec{B}(x,y) \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \vec{0}$ für $R = \sqrt{x^2+y^2}$.

Anschlussbedingungen für $\vec{B}$ für $x = 0$: Aus $\mathrm{Div}\vec{B} = 0$, $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0$ folgt

$B_x(x\downarrow 0, y) = B_x(x\uparrow 0, y)$, $\qquad \frac{1}{\mu_1}B_y(x\downarrow 0, y) = \frac{1}{\mu_2}B_y(x\uparrow 0, y)$.

b) Im Raum G_1 für $x > 0$ nimmt man ein Ersatzproblem an:

Der gesamte Raum habe Permeabilität μ_1 (statt μ_2 für $x < 0$), und es fließe der Strom I_1' (statt I_2) durch den Leiter bei $x = -d$, $y = 0$.

Im Raum G_2 für $x < 0$ nimmt man das Ersatzproblem, wo der gesamte Raum Permeabilität μ_2 habe, und der Strom I_2' statt I_1 fließe.

Ansatz für das Magnetfeld:

In G_1 : $\vec{B}(x,y) = \frac{2\mu_1I_1}{c}\left(-\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}, 0\right) + \frac{2\mu_1I_1'}{c}\left(-\frac{y}{(x+d)^2+y^2}, \frac{x+d}{(x+d)^2+y^2}, 0\right)$.

Dieser Ansatz erfüllt die Feldgleichungen für $x > 0$ und die asymptotische Bedingung.

In G_2: $\vec{B}(x,y) = \frac{2\mu_2I_2}{c}\left(-\frac{y}{(x+d)^2+y^2}, \frac{x+d}{(x+d)^2+y^2}, 0\right) + \frac{2\mu_2I_2'}{c}\left(-\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}, 0\right)$.

Falls das Einsetzen in die Anschlussbedingungen keinen Widerspruch ergibt, und I_1' und I_2' eindeutig zu berechnen sind, ist die Lösung gefunden.
1. Anschlussbedingung: $B_x(x \downarrow 0, y) = B_x(x \uparrow 0, y)$
$-\frac{2\mu_1 I_1}{c}\frac{y}{d^2+y^2} - \frac{2\mu_1 I_1'}{c}\frac{y}{d^2+y^2} = -\frac{2\mu_2 I_2}{c}\frac{y}{d^2+y^2} - \frac{2\mu_2 I_2'}{c}\frac{y}{d^2+y^2}$.
$\mu_1 I_1 + \mu_1 I_1' = \mu_2 I_2 + \mu_2 I_2'$.
2. Anschlussbedingung: $\frac{1}{\mu_1}B_y(x \downarrow 0, y) = \frac{1}{\mu_2}B_y(x \uparrow 0, y)$
$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{2\mu_1 I_1}{c}\frac{-d}{d^2+y^2} + \frac{2\mu_1 I_1'}{c}\frac{d}{d^2+y^2}\right) = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{2\mu_2 I_2}{c}\frac{d}{d^2+y^2} + \frac{2\mu_2 I_2'}{c}\frac{-d}{d^2+y^2}\right)$.
$-I_1 + I_1' = I_2 - I_2'$.
Auflösen: (letzte Gleichung mit μ_2 multiplizieren und zur vorigen addieren)
$-\mu_2 I_1 + \mu_2 I_1' = \mu_2 I_2 - \mu_2 I_2'$.
$(\mu_1 - \mu_2)\, I_1 + (\mu_1 + \mu_2)\, I_1' = 2\mu_2 I_2$.
$I_1' = -\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} I_1 + \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2} I_2$.
$I_2' = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} I_1 + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} I_2$.

7.3 Helmholtz-Spule

a) Für die Spule bei $z = d$ wählt man $\vec{r}\,' = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, d)$, $\mathrm{d}\vec{r}\,' = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)\mathrm{d}\varphi$, $\vec{r} = (x, y, z)$. Die Spule wird N Mal durchlaufen.

$$\begin{aligned}\vec{B}_1(\vec{r}) &= \frac{1}{c}\int \frac{I\,\mathrm{d}\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \\ &= \frac{1}{c} I \int_0^{2\pi N} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - r\cos\varphi \\ y - r\sin\varphi \\ z - d \end{pmatrix} \frac{1}{\left((x - r\cos\varphi)^2 + (y - r\sin\varphi)^2 + (z-d)^2\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Für $x = 0$ und $y = 0$ gilt $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1)$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{c} I \int_0^{2\pi N} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} r\,(z-d)\cos\varphi \\ r\,(z-d)\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{3/2}} = \frac{2\pi N}{c} \frac{I r^2}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

Für die zweite Spule ersetze man $d \to -d$. Also ergibt sich für beide Spulen:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{2\pi N I}{c}\left[\frac{r^2}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{3/2}} + \frac{r^2}{\left(r^2 + (z+d)^2\right)^{3/2}}\right]\vec{e}_z.$$

b) Erste Ableitung

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{2\pi N I}{c}\left[-\frac{3}{2}\frac{r^2 2\,(z-d)}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{5/2}} - \frac{3}{2}\frac{r^2 2\,(z+d)}{\left(r^2 + (z+d)^2\right)^{5/2}}\right],$$

also $\partial B/\partial z|_{z=0} = 0$.
Zweite Ableitung:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \frac{2\pi N I}{c}(-3)\left[\frac{r^2}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{5/2}} - \frac{5}{2}\frac{r^2 2\,(z-d)^2}{\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{7/2}} + \frac{r^2}{\left(r^2 + (z+d)^2\right)^{5/2}} - \frac{5}{2}\frac{r^2 2\,(z+d)^2}{\left(r^2 + (z+d)^2\right)^{7/2}}\right].$$

An der Stelle $z = 0$ reduziert sich das auf (multipliziert mit $\left(r^2 + (z-d)^2\right)^{7/2}$)

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \propto r^2 \left(r^2 + d^2\right) - 5r^2 d^2 + r^2 \left(r^2 + d^2\right) - 5r^2 d^2 = 2r^2 \left(r^2 - 4d^2\right).$$

Forderung dass die zweite Ableitung verschwindet, gibt als nicht-triviale Lösung $r = 2d$, bzw. $d = r/2$. Das Magnetfeld im Zentrum bei diesem Abstand beträgt

$$\vec{B}(0,0,z)\Big|_{d=\frac{r}{2}} = \frac{2\pi N I}{c} \frac{2r^2}{\left(r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}c} \frac{NI}{r} \vec{e}_z.$$