8. Tutorium - Lösungen **01.06.2012**

8.1 Teilchenbahn um stromdurchflossenem Draht

a) Das elektrische Feld um den Linienleiter berechnet man z.B. über die Integralform des Coulombschen Gesetzes, über die Oberfläche eines langen Zylinders mit Radius r, mit $\vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$ (in Zylinderkoordinaten $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$)
$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$, also $\oint_F \vec{E}\cdot d^2\vec{f} = 4\pi\int \rho d^3r$, $\rightarrow 2\pi r E(r) = 4\pi\lambda$, $\rightarrow \vec{E}(r) = \frac{2\lambda}{r}\vec{e}_r$.
Analog berechnet man das Magnetfeld über das Oerstedsche Gesetz entlang einer Kreisfläche um den Leiter, mit $\vec{B}(r) = B(r)\vec{e}_\varphi$:
$\mathrm{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, $\rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}\cdot d^2\vec{f}$, $\rightarrow 2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c}I$, $\rightarrow \vec{B}(r) = \frac{2I}{rc}\vec{e}_\varphi$.
Bewegungsgleichung: $m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \vec{F}(t) = q\vec{E}(\vec{r}(t)) + q\frac{\vec{v}(t)}{c}\times\vec{B}(\vec{r}(t))$.
Um Teilchen auf geradliniger Bahn zu halten, muss Gesamtkraft verschwinden. Mit $\vec{v}(t) = v\vec{e}_z$ und $\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r$ erhält man:
$\vec{F} = q\frac{2\lambda}{r}\vec{e}_r + q\frac{v}{c}\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi\frac{2I}{rc} = q\vec{e}_r\left[\frac{2\lambda}{r} - v\frac{2I}{rc^2}\right] = 0$, $\rightarrow v = \frac{\lambda c^2}{I}$.
b) Mit $\vec{v}(t) = v\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_\varphi = 0$ folgt
$\vec{F} = q\frac{2\lambda}{r}\vec{e}_r + q\frac{v}{c}\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_\varphi\frac{2I}{rc} = q\vec{e}_r\frac{2\lambda}{r}$.
Um das Teilchen auf einer Kreisbahn zu halten, muss die Kraft in negative Radialrichtung $-\vec{e}_r$ zeigen, also müssen demnach λ und q entgegengesetzte Vorzeichen haben.
Mit der Zentripetalkraft gleichgesetzt ergibt sich: $\vec{F} = -\frac{mv^2}{r}\vec{e}_r = \frac{2\lambda q}{r}\vec{e}_r$, woraus folgt $v^2 = \frac{-2\lambda q}{m}$ oder $v = \sqrt{\frac{-2\lambda q}{m}}$.
c) Im allgemeinen Fall $\vec{v} = v_z\vec{e}_z + v_\varphi\vec{v}_\varphi$ erhält man:
$\vec{F} = q\frac{2\lambda}{r}\vec{e}_r + \frac{q}{c}\left[v_z\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi + v_\varphi\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_\varphi\right]\frac{2I}{rc} = q\vec{e}_r\frac{2\lambda}{r} - \frac{q}{c}v_z\vec{e}_r\frac{2I}{rc}$.
Zentripetalkraft hängt nur von v_φ-Komponente ab: $\vec{F} = -\frac{mv_\varphi^2}{r}\vec{e}_r$.
Daher: $-\frac{mv_\varphi^2}{r}\vec{e}_r = q\vec{e}_r\frac{2\lambda}{r} - \frac{q}{c}v_z\vec{e}_r\frac{2I}{rc}$. $\rightarrow mv_\varphi^2 = \frac{2Iq}{c^2}v_z - 2q\lambda$.
Mit $\lambda = 0$ lautet die Bedingung: $mv_\varphi^2 = \frac{2Iq}{c^2}v_z$, also ist so eine Bahn auch ohne Linienladung möglich.
Bahn des Teilchens:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ v_z t \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} r\omega\sin\omega t \\ -r\omega\cos\omega t \\ v_z \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\omega t \\ -r\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Geschwindigkeit $v_\varphi = r\omega\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) \rightarrow \omega = \frac{v_\varphi}{r}$.
Also folgt wieder obige Gleichung $\vec{F} = m\vec{a} = -mr\omega^2\vec{e}_r = -m\frac{v_\varphi^2}{r}\vec{e}_r$.

8.2 Toroidale Spule mit rechteckigem Querschnitt

a) Das Magnetfeld hat nur eine $\vec{e}_\varphi$-Komponente aufgrund der Spiegelsymmetrie, wie man folgendermaßen sieht: Z.B. für $\varphi = 0$ in der $y = 0$ Ebene addieren sich an einem Ort $\vec{r} = (x, 0, z)$ die Beiträge vom Ort $\vec{r}' = (x', y', z')$ mit Strom in Richtung $\vec{j}(\vec{r}') = (j_x, j_y, j_z)$ und vom an $y = 0$ gespiegelten Ort $\vec{r}'' = (x', -y', z')$ mit $\vec{j}(j_x, -j_y, j_z)$ folgendermaßen auf $\vec{j}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}') + \vec{j}(\vec{r}'')\times(\vec{r}-\vec{r}'') = 2\left(j_z(x-x') - j_x(z-z')\right)\vec{e}_y$, sodass die $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_z$ Komponenten verschwinden. Die Spiegelsymmetrie ist (annähernd) für eine sehr fein gewickelte Spule erfüllt.
Für das Oerstedsche Gesetz nimmt man eine Kreisfläche mit Radius r. Innerhalb der Spule: Gesamtstrom NI. Außerhalb der Spule: Gesamtstrom 0. Außen: $B_\varphi = 0$. Innen:

$$\oint_{\partial F}\vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\vec{j} \quad \rightarrow \quad 2\pi r B_\varphi = \frac{4\pi}{c}(-I)N \quad \rightarrow \quad B_\varphi = -\frac{2}{c}\frac{IN}{r}$$

b) Fluss für eine Windung:

$$\Phi_1 = \int \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\vec{B} = \int_0^b \mathrm{d}z \int_{R_0}^{R_0+a} \mathrm{d}y \frac{2IN}{cy} = \frac{2INb}{c}\ln\frac{R_0+a}{R_0}$$

Selbstinduktion für Gesamtfluss $\Phi_N = N\Phi_1$:

$$L = \frac{1}{c}\Phi_N\frac{1}{I} = \frac{2N^2b}{c^2}\ln\frac{R_0+a}{R_0}$$

Abschätzung: $L > L(a \leftrightarrow b) \quad \rightarrow \quad b\ln\frac{R_0+a}{R_0} > a\ln\frac{R_0+b}{R_0}$, mit Substitution $b = R_0(\exp(\tilde{b})-1) > 0$, $a = R_0(\exp(\tilde{a})-1) > 0$ ($b > a \Leftrightarrow \tilde{b} > \tilde{a}$) verschwinden Logarithmen: $R_0(\exp(\tilde{b})-1)\tilde{a} > R_0(\exp(\tilde{a})-1)\tilde{b} \rightarrow \frac{\exp(\tilde{b})-1}{\tilde{b}} > \frac{\exp(\tilde{a})-1}{\tilde{a}}$, Taylor-Entwicklung $1+\frac{\tilde{b}}{2}+\frac{\tilde{b}^2}{3!}+... > 1+\frac{\tilde{a}}{2}+\frac{\tilde{a}^2}{3!}+...$ ist erfüllt für $\tilde{b} > \tilde{a}$ und somit $b > a$. D.h. die ursprüngliche Orientierung hat die größere Selbstinduktion.

8.3 Verzögerungsplatte

$+45°$ linear polarisiertes Licht als Superposition von 2 linear polarisierten Wellen gleicher Phase schreiben, mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$:
$\vec{E}(\vec{r},t) = E_x\vec{e}_x\cos(k_1z-\omega t+\varphi) + E_y\vec{e}_y\cos(k_2z-\omega t+\varphi)$
Vor dem Eintritt $z < 0$ gilt $k_1 = k_2$. Nach dem Eintritt $0 \leq z \leq d$: Brechungsindizes: $k_1c/\omega = n_x$, $k_2c/\omega = n_y$.
Zirkular polarisiert: Eine Komponente nach Strecke $z = d$ um $\pm\pi/2$ verschoben. Wenn y-Komponente um $+\pi/2$ ($-\pi/2$) verschoben wird, dann ist $\cos(\alpha\pm\pi/2) = \mp\sin(\alpha)$, also eine linkszirkular (rechtszirkular) polarisierte Welle.
$n_x\omega d/c - \omega t + \varphi = n_y\omega d/c - \omega t + \varphi \pm \pi/2 \quad \Rightarrow \quad (n_x - n_y)\,\omega d/c = \pm\pi/2$. Mit $\omega/c = 2\pi/\lambda$ folgt

$$d = \pm\frac{\pi}{2}\frac{c}{\omega}\frac{1}{n_x-n_y} = \pm\frac{\lambda}{4}\frac{1}{n_x-n_y}$$

Bei doppelt so dicker Verzögerungsplatte erhält eine Komponente die umgekehrte Phase $\cos(\alpha+2\pi/2) = -\cos(\alpha)$. Das Ergebnis ist eine um -45° gegenüber der x-Achse geneigte linear polarisierte Welle.
Bei einer dreifach so dicken Verzögerungsplatte erhält man wieder eine zirkular polarisierte Welle, diesmal in die andere Richtung drehend.