9. Tutorium - Lösungen **08.06.2012**

9.1 Fresnelsches Parallelepiped

An zwei Grenzflächen wird Reflexion und Transmission bei senkrechtem Einfall benötigt. Fresnelsche Formeln für senkrechten Einfall für reflektierten (E'') und gebrochenen (E') Strahl, senkrecht (s) und parallel (p) zur Einfallsebene:

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{n'-n}{n'+n}, \quad \frac{E_s''}{E_s} = \frac{n-n'}{n+n'}, \quad \frac{E_p'}{E_p} = \frac{2n}{n'+n}, \quad \frac{E_s'}{E_s} = \frac{2n}{n+n'}.$$

Amplituden ändern sich um $|n_1 - n_2|/(n_1 + n_2)$ bzw. $n_1/(n_1 + n_2)$. Im Falle der Reflexion ändert sich die Phasendifferenz von p- und s-Komponenten um π. Bei der Transmission gibt es keine Änderung der Phasendifferenz.
Totalreflexion an einer ebenen Grenzfläche zwischen Medium und Vakuum:
$n \sin\alpha = n' \sin\alpha'$, mit $n' = 1$ und $\alpha' = \pi/2$ folgt $\sin\alpha_g = 1/n$.
Für $\alpha > \alpha_g$ gibt es keine reelle Lösung für α', aber eine komplexe:
$\cos\alpha' = \sqrt{1-\sin^2\alpha'} = i\sqrt{\sin^2\alpha' - 1} = i\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}$.
Die Fresnelschen Formeln für den reflektierten Strahl erhalten eine Phase

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{\cos\alpha - n\cos\alpha'}{\cos\alpha + n\cos\alpha'}, \quad \frac{E_s''}{E_s} = \frac{n\cos\alpha - \cos\alpha'}{n\cos\alpha + \cos\alpha'}.$$

Der Ausdruck $\frac{a-ib}{a+ib} = \frac{a^2-b^2-2iab}{a^2+b^2}$ hat Betrag 1, $\frac{|a^2-b^2-2iab|}{a^2+b^2} = \frac{1}{a^2+b^2}\sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} = 1$, und eine Phase -2φ mit $\tan\varphi = b/a$. (Das sieht man, indem man $a - ib = re^{-i\varphi}$ schreibt, also $\frac{a-ib}{a+ib} = \frac{re^{-i\varphi}}{re^{+i\varphi}} = 1 \times e^{-2i\varphi}$). Daraus ergibt sich:

$$\frac{E_p''}{E_p} = e^{-2i\varphi} \quad \text{mit } \tan\varphi = \frac{n\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{\cos\alpha}, \quad \frac{E_s''}{E_s} = e^{-2i\psi} \quad \text{mit } \tan\psi = \frac{\sqrt{n^2\sin^2\alpha-1}}{n\cos\alpha}.$$

Änderung der Phasendifferenz zwischen p- und s-Komponente um $\delta := 2(\varphi - \psi)$. ($\sqrt{\cdots} := \sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}$)

$$\tan\frac{\delta}{2} = \tan(\varphi - \psi) = \frac{\tan\varphi - \tan\psi}{1 + \tan\varphi\cdot\tan\psi} = \frac{\frac{n\sqrt{\cdots}}{\cos\alpha} - \frac{\sqrt{\cdots}}{n\cos\alpha}}{1 + \frac{n\sqrt{\cdots}\sqrt{\cdots}}{n\cos^2\alpha}} = \frac{1}{n}\frac{\cos\alpha\left(n^2-1\right)\sqrt{\cdots}}{\cos^2\alpha + n^2\sin^2\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha\sqrt{n^2\sin^2\alpha-1}}{n\sin^2\alpha}.$$

Die Phasendifferenz nach 2 Totalreflexionen muss $\pi/2$ betragen, damit aus einer linear polarisierten Welle eine zirkular polarisierte Welle wird: $2\delta = \pi/2$, also $\delta = \pi/4$.

$$\tan\frac{\delta}{2} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 = \frac{\cos\alpha\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\sin^2\alpha} =: f(\alpha, n).$$

Bestimmungsgleichung für α bei gegebenem n, falls Lösung für gegebenes n existiert.
$f(\alpha, n)$ hat Nullstellen für $f(\pi/2, n) = 0$ und $f(\alpha_g(n), n) = 0$. Dazwischen gilt $f(\alpha, n) > 0$, demnach gibt es ein Maximum zwischen $\alpha_g(n) < \alpha < \pi/2$:

$$\frac{\partial f(\alpha,n)}{\partial\alpha} = 0 = -\frac{\sin\alpha\sqrt{\cdots}}{n\sin^2\alpha} - \frac{2\cos^2\alpha\sqrt{\cdots}}{n\sin^3\alpha} + \frac{n^2\sin\alpha\cos^2\alpha}{n\sin^2\alpha\sqrt{\cdots}} = 0. \quad \Big| \times n\sin^3\alpha\sqrt{\cdots}$$

$$-\sin^2\left(n^2\sin^2\alpha-1\right)-2\cos^2\alpha\left(n^2\sin^2\alpha-1\right)+n^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0.$$

$$\left(n^2\sin^2\alpha-1\right)\underbrace{\left(-\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha\right)}_{-1-\cos^2\alpha}+n^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0.$$

$$-n^2\sin^2\alpha+1+\underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha}=0.$$

$$\sin^2\alpha_{\max}=\frac{2}{n^2+1},\quad \cos^2\alpha_{\max}=\frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

$$f(\alpha_{\max},n)=\frac{\cos\alpha_{\max}\sqrt{n^2\sin^2\alpha_{\max}-1}}{n\sin^2\alpha_{\max}}=\frac{\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}\sqrt{n^2\frac{2}{n^2+1}-1}}{n\frac{2}{n^2+1}}=\frac{n^2+1}{2n}\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}=\frac{n^2-1}{2n}.$$

Bedingung für Existenz eines Winkels: $\frac{n^2-1}{2n}\geq\sqrt{2}-1$:

$$n^2-2\left(\sqrt{2}-1\right)n-1\geq 0.$$

$$n_{1,2}=\sqrt{2}-1\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+1}=\sqrt{2}-1\pm\sqrt{4-2\sqrt{2}},\quad n_1\approx 1.49661,\ n_2\approx -0.66818$$

$$\left(n-\sqrt{2}-1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)\left(n-\sqrt{2}-1-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)\geq 0$$

ist erfüllt für $n\geq\sqrt{2}+1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}\approx 1.49661$ oder $n\leq\sqrt{2}+1-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\approx -0.66818$.
b) Bei Vernachlässigung von Mehrfachreflexionen gilt für die das Parallelepiped verlassende Welle:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=e^{i\gamma}\left(|E_p|\vec{e}_p\underbrace{\pm\ i}_{\text{Phasenverschiebung}}|E_s|\vec{e}_s\right)\underbrace{\frac{2}{n+1}}_{\text{eintretend}}\underbrace{\frac{2n}{n+1}}_{\text{austretend}}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$

Für zirkulare Polarisation müssen die Beträge gleich sein: $|E_p|=|E_s|$, also die linear polarisierte Welle unter 45° einfallen.
c) Da $n=1,51>1.49661...$ ist das möglich. Man erhält numerisch
$f(\alpha,\,1,51)=\sqrt{2}-1$ ist erfüllt für $\alpha=48°37'$ und $\alpha=54°37'$.
Mehrfachreflexion bringt durch Reflexion am Ausgang und am Eingang einen zusätzlichen Beitrag von der Größe

$$\left|\frac{n-1}{n+1}\right|^2.$$

Für $n=1,51$ beträgt das 0.04, d.h. mit einem Fehler von etwa $\sim 5\%$ ist zu rechnen.

9.2 Strahlungsdruck einer inhomogenen ebenen Welle

a) Die Herleitung aus der Vorlesung muss für allgemeines μ und σ wiederholt werden. Allerdings kann man sich auf den Fall beschränken $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$. Wir nehmen eine linear polarisierte Welle an $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$, $\vec{H}_0 = H_0\vec{e}_y$. Für die reflektierte Welle gilt $\vec{k}'' = -k''\vec{e}_z$, und um das Rechtssystem zu erhalten $\vec{E}_0'' = E_0''\vec{e}_x$ und $\vec{H}_0'' = -H_0''\vec{e}_y$. Aus $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}_0$ und $\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\frac{\omega}{c}\eta\vec{E}_0$ folgt $k = k'' = \omega/c$ und $k' = \sqrt{\mu\eta}\omega/c$. Aus $\vec{k}' \times \vec{E}_0' = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}_0'$ folgt $H_0' = E_0'k'\frac{c}{\omega}\frac{1}{\mu} = E_0'\sqrt{\eta/\mu}$, im Vakuum gilt $H_0 = E_0$ und $H_0'' = E_0''$. Anschlussbedingungen $\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{n} \times \left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right) = 0$ und $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0$ liefern $E_0 + E_0'' = E_0'$ und $H_0 - H_0'' = H_0'$ oder $E_0 - E_0'' = E_0'\sqrt{\eta/\mu}$. Auflösen ergibt $E_0'' = E_0(1 - \sqrt{\eta/\mu})/(1 + \sqrt{\eta/\mu})$. Mit $\sqrt{\eta} = (n + i\kappa)/\sqrt{\mu}$ folgt $E_0'' = E_0(\mu - n - i\kappa)/(\mu + n + i\kappa)$. Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{|E_0''|^2}{|E_0|^2} = \frac{(\mu - n - i\kappa)(\mu - n + i\kappa)}{(\mu + n + i\kappa)(\mu + n - i\kappa)} = \frac{(n-\mu)^2 + \kappa^2}{(n+\mu)^2 + \kappa^2}.$$

b) Niederfrequenter Fall:

$$n + i\kappa = \sqrt{\mu\eta} = \sqrt{\mu\left(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)} \approx \sqrt{i\frac{4\pi\sigma}{\omega}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}, \qquad \Rightarrow \quad n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}$$

Welle mit Wellenvektor $k' = (n + i\kappa)\omega/c$ hat einen exponentiell abfallenden Anteil:

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}E_0'\vec{e}_x e^{i(\vec{k}'\vec{x} - \omega t)} + c.c. = \frac{1}{2}E_0'\vec{e}_x e^{-\kappa\frac{\omega}{c}\vec{e}_z\vec{x}} e^{i(n\frac{\omega}{c}\vec{e}_z\vec{x} - \omega t)} + c.c..$$

Für $d \gg c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ folgt $\kappa\frac{\omega}{c}d = d\sqrt{2\pi\sigma\omega}/c \gg 1$ und die Welle ist fast verschwunden. Um den Strahlungsdruck auszurechnen kann man daher ein Volumen um das gesamte Medium annehmen, wobei aber nur die „Vorderseite“ (die im Vakuum knapp vor dem Medium liegt) beiträgt. Vom Maxwellschen Spannungstensor trägt nur $w_{em}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ bei, also Beiträge der einlaufenden und der reflektierten Welle. Der Strahlungsdruck beträgt somit $P = F/A = \frac{1}{4\pi}\vec{E}^2(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}|E_0|^2(1 + R)$ (Faktor $\frac{1}{2}$ von Mittelung über eine Periode) mit

$$R = \frac{(n-1)^2 + n^2}{(n+1)^2 + n^2}.$$

Gegenüberliegende Beiträge auf den „Seitenteilen“ der Oberfläche heben sich gegenseitig auf, da der Spannungstensor aufgrund der Translationssymmetrie gleich ist, aber $\mathrm{d}^2\vec{f}$ das Vorzeichen ändert. Es gibt zwar auch einen zeitabhängigen Beitrag vom Volumen, aber für jeden einzelnen Punkt im Volumen verschwindet die zeitlich gemittelte Ableitung des Poynting-Vektors, daher trägt das Volumen nicht bei.

9.3 Metallischer Spiegel

a) Ansatz:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z, t) &= \left[E_0^+ \cos(kz - \omega t) + E_0^- \cos(-kz - \omega t)\right]\vec{e}_x, \\
\vec{B}(z, t) &= \vec{e}_z \times \vec{E}^+(z, t) + (-\vec{e}_z) \times \vec{E}^-(z, t) = \left[E_0^+ \cos(kz - \omega t) - E_0^- \cos(-kz - \omega t)\right]\vec{e}_y.
\end{aligned}$$

Ansatz erfüllt Feldgleichungen für $x < 0$. Randbedingungen: $\mathrm{Div}\vec{B} = 0 \Rightarrow B_z(0, t) = 0$ ist erfüllt. $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$ $\Rightarrow E_y(0, t) = 0$ ok, $E_x(0, t) = 0 \Rightarrow E_0^+ = -E_0^-$.

$$\begin{aligned}
\cos(kz - \omega t) - \cos(kz + \omega t) &= \cos(kz)\cos(\omega t) + \sin(kz)\sin(\omega t) - [\cos(kz)\cos(\omega t) - \sin(kz)\sin(\omega t)] \\
&= 2\sin kz \sin\omega t \\
\cos(kz - \omega t) + \cos(kz + \omega t) &= 2\cos kz \cos\omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z, t) &= 2E_0^+ \sin kz \sin\omega t\vec{e}_x, \\
\vec{B}(z, t) &= 2E_0^+ \cos kz \cos\omega t\vec{e}_y.
\end{aligned}$$

b) Energiedichte:

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \frac{1}{8\pi}4\left(E_0^+\right)^2\left[\sin^2 kz \sin^2 \omega t + \cos^2 kz \cos^2 \omega t\right].$$

$$\underbrace{\sin^2 kz}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2kz)} \sin^2 \omega t + \underbrace{\cos^2 kz}_{\frac{1}{2}(1+\cos 2kz)} \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}_{1} + \cos 2kz\,\big(\underbrace{\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t}_{\cos 2\omega t}\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2kz \cos 2\omega t\right].$$

$$w_{em} = \frac{1}{4\pi}\left(E_0^+\right)^2\left[1 + \cos 2kz \cos 2\omega t\right]$$

Zeitmittel über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$: $\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{4\pi}\left(E_0^+\right)^2$

Energiestromdichte (Poyntingvektor):

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \frac{c}{4\pi}4\left(E_0^+\right)^2 \vec{e}_z \underbrace{\sin kz \cos kz}_{\frac{1}{2}\sin 2kz}\underbrace{\sin \omega t \cos \omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} = \frac{c}{4\pi}\left(E_0^+\right)^2 \vec{e}_z \sin 2kz \sin 2\omega t.$$

Zeitmittel: $\left\langle \vec{S} \right\rangle = 0.$