

10. Tutorium - Lösungen

15.06.2012

10.1 Kontrahierte Leiter

a) Aus der Sicht des Abstellraumes S' :Länge des Abstellraumes: $l' = l_0 = 1$ mLänge der Leiter: $L' = L_0/\gamma$. Mit $\beta = v/c = \sqrt{3}/2$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 2$ folgt $L' = 1$ m.Weltkarte von S' für jenen Zeitpunkt, zu dem Leiteranfang A die Wand berührt, zeigt, dass das Ende der Leiter E gerade in den Abstellraum hineinpasst, und man daher die Tür schließen kann. Nachdem die Leiter zum Stillstand gekommen ist, wird sie die Tür aufsprengen oder (und) sich deformieren.Aus der Sicht der Leiter im Ruhesystem S :Länge des Abstellraumes: $l = l_0/\gamma = 0,5$ mLänge der Leiter: $L = L_0 = 2$ m.Weltkarte von S für jenen Zeitpunkt, zu dem die Wand W die Leiter an deren Anfang A berührt, scheint zu zeigen, dass die Leiter nicht hineingeht.Lösung des „Paradoxons“: Wegen der endlichen Signalgeschwindigkeit c physikalischer Wirkungen kann das Ende der Leiter E zunächst nichts davon wissen, dass die Wand W bei A angestoßen ist. E bleibt daher in S solange in Ruhe, bis von A nach E ein Signal (in Form einer Stoßwelle) gelaufen ist, welches E sagt, „Wir müssen mit“. In der Zwischenzeit wird aber A von W „mitgenommen“. E bleibt in Ruhe, bis die Zeit $t_s = 2\text{ m}/(3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 2/c$ vergangen ist. In dieser Zeit läuft aber die Frontseite F des Abstellraumes die Strecke $s_F = vt_x = \frac{c\sqrt{3}}{2} \frac{2}{c} = \sqrt{3} \text{ m} \approx 1,732 \text{ m} > 1,5 \text{ m}$!b) Die Leiter geht sogar „recht bequem“ hinein. Sie würde sogar noch hineingehen, wenn sie die Ruhelänge $0,5 \text{ m} + v(L_0/c) = L_0$, oder $L_0 = 0,5 \text{ m}/(1-\beta) = 1/(2-\sqrt{3}) \text{ m} \approx 3,732 \text{ m}$ hätte!Anders betrachtet: Der Abstellraum könnte im Falle einer $L_0 = 2$ m langen Leiter noch kürzer sein. Die minimale Länge l_{\min} des Abstellraumes in S liegt dann vor, wenn das „Wettrennen“ von der Abstellraumfront F (Geschwindigkeit v) mit dem Signal $A \rightarrow E$ (Geschwindigkeit c) gerade „unentschieden“ ausgeht, also

$$\frac{2 \text{ m} - l_{\min}}{v} = \frac{2 \text{ m}}{c}$$

also $l_{\min} = 2 - 2\frac{v}{c} = (2 - 2\sqrt{3}) \text{ m} \Rightarrow l_{0,\min} = \gamma l_{\min} = 2(2 - \sqrt{3}) \text{ m} \approx 0,534 \text{ m}$.Das Geschehen für $l_{0,\min}$ aus der Sicht des Gesellen in S' :Berührt A zum ersten Mal die Wand, so „weiß“ E noch nichts davon, läuft also noch unverändert in den Abstellraum hinein. Das kleinstmögliche $l_0 = l_{0,\min}$ für das eine $L_0 = 2$ m Leiter gerade hineingeht, liegt dann vor, wenn das Leiterende von E nach F (Geschwindigkeit v) mit dem Signal A (bzw. W) nach F (Geschwindigkeit c) zusammentrifft:

$$\frac{1 \text{ m} - l_{0,\min}}{v} = \frac{l_{0,\min}}{c}$$

 $l_{0,\min} = 1 \text{ m}/(1 + \frac{v}{c}) = 2/(2 + \sqrt{3}) \text{ m} = 2(2 - \sqrt{3}) \text{ m} \approx 0,534 \text{ m}$ wie gehabt.

c) Zum selber zeichnen.

10.2 Vorbeiflug eines Teilchens an einem Stab

a) Im System S erscheint der Stab lorentzkontrahiert und hat eine Länge $L = \frac{L_0}{\gamma}$. In der Zeit $\Delta t = (L/2)/v$ bewegt sich der Stab um $+L/2$ und das Teilchen um $-L/2$, also weit genug um einander zu passieren.

$$\Delta t = \frac{L}{2v} = \frac{L_0}{2v\gamma(v)} = \frac{L_0}{2v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

b) Lorentz-Transformation nach S' :

Vom Beginn der Begegnung E_1 bis zum Ende der Begegnung E_2 bewegt sich das Teilchen in S eine Strecke $\Delta x = -L/2$, während eine Zeit Δt (aus Punkt a) verstreicht. Transformation von Strecke und Zeit in das System S' ergibt:

$$c\Delta t' = \gamma(v) \left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x \right) = \gamma \left(c\frac{L_0}{2v\gamma} + \frac{v}{c}\frac{L_0}{2\gamma} \right) = c\frac{L_0}{2v} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right).$$

c) Zum selber zeichnen.

10.3 Vierervektoren

a)

Lösungsweg 1:

$$s^\mu = \Lambda'^\mu{}_\nu(\beta)x^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma z \\ x \\ y \\ -\beta\gamma ct + \gamma z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_\mu s^\mu &= (\gamma ct - \beta\gamma z)^2 - x^2 - y^2 - (-\beta\gamma ct + \gamma z)^2 \\ &= (\gamma ct)^2 - 2\gamma ct\beta\gamma z + (\beta\gamma z)^2 - x^2 - y^2 - (\beta\gamma ct)^2 + 2\beta\gamma ct\gamma z - (\gamma z)^2 \\ &= (ct)^2 (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) - z^2 (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) - x^2 - y^2 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_\mu x^\mu. \end{aligned}$$

Hier wurde verwendet $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = (1 - \beta^2)/(1 - \beta^2) = 1$, mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Wenn $x_\mu x^\mu < 0$ (raumartig), $= 0$ (lichtartig) > 0 (zeitartig), dann erfüllt $s_\mu s^\mu = x_\mu x^\mu$ das selbe.

Lösungsweg 2:

$$s_\mu s^\mu = \Lambda'^\rho{}_\mu(\beta)x_\rho \Lambda'^\mu{}_\nu(\beta)x^\nu = x_\rho (\Lambda'^{-1})^\rho{}_\mu(\beta) \Lambda'^\mu{}_\nu(\beta)x^\nu = x_\rho \delta^\rho{}_\nu x^\nu = x_\rho x^\rho.$$

Hier wurde verwendet $\Lambda'^\rho{}_\mu(\beta) = \Lambda'^\rho{}_\mu(-\beta) = (\Lambda'^{-1})^\rho{}_\mu(\beta)$.

b)

$$\Lambda^\nu{}_\tau(\beta) D^\tau{}_\sigma(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \cos \alpha & 0 & -\beta\gamma \sin \alpha \\ -\beta\gamma & \gamma \cos \alpha & 0 & \gamma \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D^\mu{}_\nu(\alpha') \Lambda^\nu{}_\tau(\beta) D^\tau{}_\sigma(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha' & 0 & \sin \alpha' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha' & 0 & \cos \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \cos \alpha & 0 & -\beta\gamma \sin \alpha \\ -\beta\gamma & \gamma \cos \alpha & 0 & \gamma \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \cos \alpha & 0 & -\beta\gamma \sin \alpha \\ -\beta\gamma \cos \alpha' & (\gamma \cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha') & 0 & (\gamma \sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha') \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma \sin \alpha' & (-\gamma \cos \alpha \sin \alpha' - \sin \alpha \cos \alpha') & 0 & (-\gamma \sin \alpha \sin \alpha' + \cos \alpha \cos \alpha') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit $\alpha = \pi/2$ und $\alpha' = -\pi/2$ ergibt sich $(\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0, \sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1)$.

$$D^\mu{}_\nu(-\frac{\pi}{2}) \Lambda^\nu{}_\tau(\beta) D^\tau{}_\sigma(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \Lambda'^\mu{}_\nu(\beta).$$