Übungsblatt 1

für das Tutorium am 15.03.2013

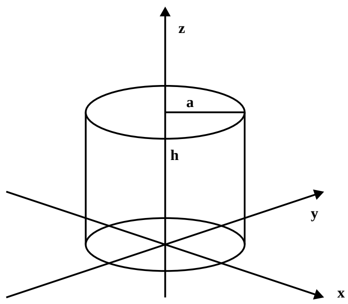
1. **Indexakrobatik**

   (a) Berechne Divergenz und Rotation von $\vec{a} \times \vec{b}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektorfelder sind, die von $\vec{r} = x_i$ abhängen.

   (b) Berechne Divergenz und Rotation von $\psi \cdot \vec{a}$, wobei ψ eine skalare Funktion von $\vec{r} = x_i$ ist.

   (c) Berechne $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{r}}{r} f(r)\right)$, wobei die skalare Funktion f nur von $r = |\vec{r}|$ abhängt.

2. **Satz von Gauß**
   Gegeben sei ein Vektorfeld mit den cartesischen Komponenten $\vec{F}(\vec{r}) = (4x, -2y^2, z^2)$. Überprüfe die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für das Beispiel eines Zylinders, der durch die Seitenflächen $z = 0$, $z = h$ und $x^2 + y^2 = a^2$ begrenzt wird (siehe Abbildung).



   (a) Berechne $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d^3x$.
   Hinweis: Es gilt die Integralformel $\int_{-a}^{a} dy \sqrt{a^2 - y^2} = \frac{\pi}{2} a^2$.

   (b) Berechne $\oint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$.
   Hinweis: Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Beitrages des Zylindermantels, sowie die Integralformeln $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi = \pi$ und $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^3 \varphi = 0$.

3. **Satz von Stokes**
   Verifiziere den Satz von Stokes für ein Vektorfeld $\vec{F} = (0, 0, -xz)$ und eine Fläche S, definiert als der im ersten Oktanten gelegene Teil der Ebene $4x + y + 8z = 8$.

   (a) Berechne $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A}$.

   (b) Berechne $\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2a, 2b, 3a, 3b