Übungsblatt 7

für das Tutorium am 24.05.2013

19. **Ellipsoider Leiter**
Ein isolierter Leiter mit Gesamtladung Q habe die Form eines Rotationsellipsoids. Man drehe das Ellipsoid so, dass die Brennpunkte entlang der z-Achse an $z = \pm\ell$ liegen.

   (a) Berechne $V(\vec{x})$ ausserhalb des Leiters. Verwende hierzu das Resultat aus der Vorlesung für das Potential einer Linienladung der Länge 2ℓ entlang $z \in [-\ell, \ell]$ mit Ladungsdichte λ:
$$V(x,y,z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{z+\ell+\sqrt{x^2+y^2+(z+\ell)^2}}{z-\ell+\sqrt{x^2+y^2+(z-\ell)^2}}\right] \tag{1}$$
Verwende Zylinderkoordinaten.

   (b) Sei c die Länge der grossen Halbachse und a die Länge der kleinen Halbachse, sodass die Gleichung für die Ellipse in der xz-Ebene durch $(x/a)^2 + (z/c)^2 = 1$ gegeben ist. Weiters sei die Exzentrizität gegeben durch $\varepsilon = \ell/c$, sowie $a = c\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Was ist das Potential V_0 des Leiters ausgedrückt durch c und ε?

   (c) Bestimme die Oberflächenladungsdichte an $(x,y,z) = (0,0,c)$ und $(x,y,z) = (a,0,0)$. Drücke das Resultat mithife von c und ε aus. Was passiert für eine "Nadel" ($\varepsilon \simeq 1$)?

20. **Leiterrohr mit quadratischem Querschnitt**
Betrachte eine in z-Richtung unendlich ausgedehnte Leiterröhre mit quadratischem Querschnitt und Seitenlänge a. Die Seiten $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = -\frac{a}{2}$ seien geerdet. Die Seite $y = \frac{a}{2}$ werde auf konstantem Potential V_0 gehalten.

   (a) Bestimme die Differentialgleichung und die Randbedingungen, die das elektrostatische Potential erfüllt.

   (b) Löse die Differentialgleichung mit dem Seperationsansatz.
Hinweis: $\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b$

   (c) Berechne, ausgehend vom Resultat von (b) mithilfe des Superpositionsprinzips den Fall wo an alle vier Seiten beliebige Potentiale $V_1, \ldots, V_4$ angelegt werden.

   (d) Berechne $V(0,0)$ für diesen allgemeinen Fall.
Hinweis:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{\cosh\left[(2n+1)\pi/2\right]} = \frac{\pi}{8}$$

21. **Legendrepolynome**

(a) Die Legendrepolynome können mithilfe der Formel von Rodriguez berechnet werden:

$$P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \tag{2}$$

Zeige mithilfe der Formel von Rodriguez:

$$(2n+1) P_n(x) = \frac{d}{dx} P_{n+1}(x) - \frac{d}{dx} P_{n-1}(x) \tag{3}$$

(b) Die Legendrepolynome haben die erzeugende Funktion

$$g(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \tag{4}$$

Berechne damit die ersten vier Legendrepolynome.

Ankreuzbar: 19ab, 19c, 20ab, 20cd, 21a, 21b