1 Ergänzungsblatt anti-symmetrische Tensoren

Elektrodynamik I, Daniel Grumiller. [Siehe auch Ergänzungskapitel 18]
Allgemein: total anti-symmetrische Tensoren $F^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ erfüllen

$$F^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i\mu_{i+1}\cdots\mu_n} = -F^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{i+1}\mu_i\cdots\mu_n} \tag{1}$$

für jedes $i = 1..(n-1)$. Also jede paarweise Indexvertauschung ergibt einen Vorzeichenwechsel. Offensichtlich muss $n \leq D$ gelten, wobei D die Dimension der Raumzeit ist. Wir beschränken uns im weiteren auf den Fall $D = 4$. Weiters muss $n \geq 2$ gelten, damit man sinnvoll von Antisymmetrie sprechen kann. Es gibt also in vier Raumzeitdimensionen antisymmetrische Tensoren der Stufe 4, 3 und 2, deren allgemeine Eigenschaften wir im Folgenden besprechen.

1.1 ϵ-tensor

Definition:

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} := \begin{cases} +1 & \text{wenn } \mu\nu\sigma\tau \text{ gerade Permutation von 0123,} \\ -1 & \text{wenn } \mu\nu\sigma\tau \text{ ungerade Permutation von 0123,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Eigenschaften: $\epsilon^{0123} = +1$ und $\epsilon_{0123} = \eta_{00}\eta_{11}\eta_{22}\eta_{33}\epsilon^{0123} = -1$. Jeder total anti-symmetrische Tensor der vierten Stufe muss proportional zum ϵ-tensor sein.

1.2 Anti-symmetrische 3-Tensoren

Diese Tensoren sind für unsere Zwecke von geringem Interesse, da man sie in $D = 4$ immer in einen Vektor verwandeln kann ("Hodge-Dualität"):

$$T_{\nu\sigma\tau} \to \tilde{T}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} T_{\nu\sigma\tau} \tag{3}$$

1.3 Anti-symmetrische 2-Tensoren

Allgemeines. Diese Tensoren sind von fundamentaler Bedeutung für die Elektrodynamik. Nehmen wir an, wir hätten einen anti-symmetrischen Tensor,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}\,. \tag{4}$$

Nehmen wir weiters an, wir hätten einen Beobachter in einem Inertialsystem mit 4-er Geschwindigkeit u^μ. Dann heisst die Projektion

$$E^\nu := \tfrac{1}{c}\, u_\mu F^{\mu\nu} \tag{5}$$

"elektrischer Anteil" und die Projektion

$$B^\nu := \tfrac{1}{2c}\, u_\mu \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \tag{6}$$

"magnetischer Anteil" des Tensors $F^{\mu\nu}$.

Ruhesystem. Im Ruhesystems des Beobachters gilt $\frac{1}{c}\, u^\mu = (1,\, 0,\, 0,\, 0)$. Daraus folgt $E^0 = B^0 = 0$. Für die räumlichen Komponenten gilt

$$E_i = F_{0i} = F^{i0} = -E^i \tag{7}$$

und

$$B_i = -B^i = -\tfrac{1}{2}\,\epsilon^{0ijk} F_{jk} = -\tfrac{1}{2}\,\epsilon^{ijk} F_{jk} \tag{8}$$

wobei wir im letzten Schritt den 4-dimensionalen durch den 3-dimensionalen ϵ-Tensor ersetzen konnten. In karthesischen Koordinaten gilt $E_i = (E_x,\, E_y,\, E_z)$ und analog $B_i = (B_x,\, B_y,\, B_z)$.

$\boldsymbol{F}$ ausgedrückt durch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$. Eine nützliche Zwischenrechnung erlaubt uns, jeden antisymmetrischen 2-Tensor durch seine elektrischen und magnetischen Anteile auszudrücken.

$$B^i \epsilon_{inm} = \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{ijk} \epsilon_{inm} F_{jk} = \tfrac{1}{2}\, (\delta^j_n \delta^k_m - \delta^j_m \delta^k_n)\, F_{jk} = \tfrac{1}{2}\, F_{nm} - \tfrac{1}{2}\, F_{mn} = F_{nm} \tag{9}$$

Aus den Gleichungen (7) und (9) lesen wir ab:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Mit oberen Indices ergibt sich aus $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau} F_{\sigma\tau}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(Hodge-)Dualer Tensor $\tilde{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{\mu\nu}}$. Definition:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \tfrac{1}{2}\, \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\, F_{\sigma\tau} \tag{12}$$

Ausgedrückt durch elektrischen und magnetischen Anteil erhält man aus (10):

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Im Vergleich zu (11) ist also $E_i \to B_i$ und $B_i \to -E_i$ ausgetauscht.

Skalare Invarianten. Die beiden Kontraktionen $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} F_{\mu\nu}$ sind die einzigen unabhängigen skalaren Invarianten die sich aus einem anti-symmetrischen Tensor zweiter Stufe bilden lassen. Ausgedrückt durch die elektrischen und magnetischen Anteile ergibt sich

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \qquad\qquad \tilde{F}^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} = -4\, \vec{E} \cdot \vec{B}\,. \tag{14}$$

Lorentz-Boosts. Zur Erinnerung: allgemein gilt für einen Tensor zweiter Stufe

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\tau F^{\sigma\tau} = (\Lambda F \Lambda^T)^{\mu\nu} \tag{15}$$

wobei Λ eine entsprechende Lorentz-Transformations-Matrix ist. Für boosts in positive x-Richtung erhalten wir für die rechte Seite von (15) den Ausdruck

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Durch elektrische und magnetische Anteile ausgedrückt ergibt sich aus (15) mit (16)

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x\,, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z)\,, & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y)\,, \\ B'_x &= B_x\,, & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z)\,, & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Das Verschwinden von elektrischen/magnetischen Anteilen ist also abhängig vom Bezugssystem. Beispiel: $B_i = E_x = E_y = 0$ ergibt $B'_y = \beta\gamma E_z$ und $E'_z = \gamma E_z$.