10. Tutorium - Lösungen **06.06.2014**

10.1 Kreisförmige Plattenkondensatoren

a) Kapazität $C = Q/U$ mit $U = \phi(z=d) - \phi(z=0)$. Mit $\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi = -\partial_z \phi(z)\vec{e}_z \Rightarrow$

$$\phi(d) - \phi(0) = -\int_0^d E_z(z)\mathrm{d}z = \int_0^d \frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}\mathrm{d}z = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{d}{\Delta\epsilon}\ln\left(\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}\right)\Bigg|_0^d = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{d}{\Delta\epsilon}\ln\left(\frac{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right).$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{R_0^2}{4d}\frac{-\Delta\epsilon}{\ln\left(1 - \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right)} = \frac{R_0^2}{4d}\frac{\Delta\epsilon}{\ln\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}\right)}.$$

10.2 Kugelkondensator

a) Integralform: $\oint_{\partial V} d^2\vec{f}\cdot\vec{D} = \int_V d^3r\, 4\pi\rho$.
$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$.
$4\pi r^2 \left(\frac{1}{2}\underbrace{D^{\text{oben}}(r)}_{=E(r)} + \frac{1}{2}\underbrace{D^{\text{unten}}(r)}_{=\epsilon E(r)}\right) = 4\pi Q$.
$2\pi r^2\,(1+\epsilon)\,E(r) = 4\pi Q$.
$E(r) = \frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{r^2}$.
$D(r) = \begin{cases} \frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{r^2} & \text{oben,} \\ \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\frac{Q}{r^2} & \text{unten.} \end{cases}$
Rand- und Anschlussbedingungen:
$\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 4\pi\sigma$.
$\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$.
An der Kugeloberflächen gilt: Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig:
außen verschwindet $\vec{E}$, innen verläuft es radial →OK.
An der Grenzfläche: die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig:
oben und unten sind E_{radial} gleich.
b) Flächenladung:
$\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 4\pi\sigma$. Innen und außen verschwindet das Feld.
Innen: $\sigma = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{a^2} & \text{oben,} \\ \frac{1}{4\pi}\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\frac{Q}{a^2} & \text{unten.} \end{cases}$
Außen: $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{b^2}\begin{cases} 1 & \text{oben,} \\ \epsilon & \text{unten.} \end{cases}$
c) Kapazität:
$C = \frac{Q}{U}$.
$U = \phi(a) - \phi(b)$.
$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\phi(r) = -\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)$.
$\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) = -E(r) = -\frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{r^2}$.
$U = \phi(a) - \phi(b) = \int_b^a \left(-\frac{2}{1+\epsilon}\right)\frac{Q}{r^2}dr = \frac{2}{1+\epsilon}\left.\frac{Q}{r}\right|_b^a = \frac{2Q}{1+\epsilon}\frac{b-a}{ab}$.
$C = \frac{Q}{U} = \frac{1+\epsilon}{2}\frac{ab}{b-a}$.

10.3 Halbräume mit unterschiedlichen Permeabilitäten

a) Aus Symmetriegründen gilt $B_x(x,y)$, $B_y(x,y)$, $B_z = 0$.
Feldgleichungen für $\vec{B}$: Für Materie mit Materialgleichung $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r})$ gilt allgemein:
$\text{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0$ und $\text{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$, also $\text{rot}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}(\vec{r})$.
Somit gilt
$G_1 : x > 0$: $\text{div}\vec{B}(x,y) = 0, \quad \text{rot}\vec{B}(x,y) = \frac{4\pi}{c}\mu_1 I_1 \delta(x-d)\delta(y)\vec{e}_z$.
$G_2 : x < 0$: $\text{div}\vec{B}(x,y) = 0, \quad \text{rot}\vec{B}(x,y) = \frac{4\pi}{c}\mu_2 I_2 \delta(x+d)\delta(y)\vec{e}_z$.
Asymptotische Bedingung für $\vec{B}$: $\vec{B}(x,y) \stackrel{R\to+\infty}{\longrightarrow} \vec{0}$ für $R = \sqrt{x^2+y^2}$.
Anschlussbedingungen für $\vec{B}$ für $x = 0$: Aus $\text{Div}\vec{B} = 0$, $\text{Rot}\vec{H} = 0$ folgt
$B_x(x \downarrow 0, y) = B_x(x \uparrow 0, y), \qquad \frac{1}{\mu_1}B_y(x \downarrow 0, y) = \frac{1}{\mu_2}B_y(x \uparrow 0, y)$.
b) Im Raum G_1 für $x > 0$ nimmt man ein Ersatzproblem an:
Der gesamte Raum habe Permeabilität μ_1 (statt μ_2 für $x < 0$), und es fließe der Strom I_1' (statt I_2) durch den Leiter bei $x = -d$, $y = 0$.
Im Raum G_2 für $x < 0$ nimmt man das Ersatzproblem, wo der gesamte Raum Permeabilität μ_2 habe, und der Strom I_2' statt I_1 fließe.
Ansatz für das Magnetfeld:
In $G_1 : \vec{B}(x,y) = \frac{2\mu_1 I_1}{c}\left(-\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}, 0\right) + \frac{2\mu_1 I_1'}{c}\left(-\frac{y}{(x+d)^2+y^2}, \frac{x+d}{(x+d)^2+y^2}, 0\right)$.
Dieser Ansatz erfüllt die Feldgleichungen für $x > 0$ und die asymptotische Bedingung.
In G_2: $\vec{B}(x,y) = \frac{2\mu_2 I_2}{c}\left(-\frac{y}{(x+d)^2+y^2}, \frac{x+d}{(x+d)^2+y^2}, 0\right) + \frac{2\mu_2 I_2'}{c}\left(-\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}, 0\right)$.
Falls das Einsetzen in die Anschlussbedingungen keinen Widerspruch ergibt, und I_1' und I_2' eindeutig zu berechnen sind, ist die Lösung gefunden.
1. Anschlussbedingung: $B_x(x \downarrow 0, y) = B_x(x \uparrow 0, y)$
$-\frac{2\mu_1 I_1}{c}\frac{y}{d^2+y^2} - \frac{2\mu_1 I_1'}{c}\frac{y}{d^2+y^2} = -\frac{2\mu_2 I_2}{c}\frac{y}{d^2+y^2} - \frac{2\mu_2 I_2'}{c}\frac{y}{d^2+y^2}$.
$\mu_1 I_1 + \mu_1 I_1' = \mu_2 I_2 + \mu_2 I_2'$.
2. Anschlussbedingung: $\frac{1}{\mu_1}B_y(x \downarrow 0, y) = \frac{1}{\mu_2}B_y(x \uparrow 0, y)$
$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{2\mu_1 I_1}{c}\frac{-d}{d^2+y^2} + \frac{2\mu_1 I_1'}{c}\frac{d}{d^2+y^2}\right) = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{2\mu_2 I_2}{c}\frac{d}{d^2+y^2} + \frac{2\mu_2 I_2'}{c}\frac{-d}{d^2+y^2}\right)$.
$-I_1 + I_1' = I_2 - I_2'$.
Auflösen: (letzte Gleichung mit μ_2 multiplizieren und zur vorigen addieren)
$-\mu_2 I_1 + \mu_2 I_1' = \mu_2 I_2 - \mu_2 I_2'$.
$(\mu_1 - \mu_2)\, I_1 + (\mu_1 + \mu_2)\, I_1' = 2\mu_2 I_2$.
$I_1' = -\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_1 + \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_2$.
$I_2' = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I_1 + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_2$.

10.4 Feld zwischen unendlich langen Leitern mit sichelförmigem Querschnitt

Für die Berechnung von $\vec{B}$ wird am einfachsten die Integralform des Oerstedschen Gesetzes angewendet. Im Inneren eines Zylinders gilt: $\oint_{\partial F}\vec{B}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_F \vec{j}(\vec{r})\mathrm{d}^2\vec{f}$. Aus Symmetriegründen: $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$.
$2\pi r B(r) = \frac{4\pi}{c}j_0 r^2\pi \;\Rightarrow B(r) = \frac{2\pi}{c}j_0 r, \quad \vec{B} = \frac{2\pi}{c}j_0(-y, x, 0)$.
Superposition von zwei Zylindern mit Strömen in entgegengesetzter Richtung: $\vec{B}(x,y) = \frac{2\pi}{c}j_0(-y, x-a, 0) - \frac{2\pi}{c}j_0(-y, x+a, 0) = -\frac{4\pi}{c}aj_0\vec{e}_y$.