11. Tutorium - Lösungen **13.06.2014**

11.1 Toroidale Spule mit rechteckigem Querschnitt

a) Das Magnetfeld hat nur eine $\vec{e}_\varphi$-Komponente aufgrund der Spiegelsymmetrie, wie man folgendermaßen sieht: Z.B. für $\varphi = 0$ in der $y = 0$ Ebene addieren sich an einem Ort $\vec{r} = (x, 0, z)$ die Beiträge vom Ort $\vec{r}\,' = (x', y', z')$ mit Strom in Richtung $\vec{j}(\vec{r}\,') = (j_x, j_y, j_z)$ und vom an $y = 0$ gespiegelten Ort $\vec{r}\,'' = (x', -y', z')$ mit $\vec{j}(j_x, -j_y, j_z)$ folgendermaßen auf $\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,') + \vec{j}(\vec{r}\,'') \times (\vec{r} - \vec{r}\,'') = 2\,(j_z(x - x') - j_x(z - z'))\,\vec{e}_y$, sodass die $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_z$ Komponenten verschwinden. Die Spiegelsymmetrie ist (annähernd) für eine sehr fein gewickelte Spule erfüllt.
Für das Oerstedsche Gesetz nimmt man eine Kreisfläche mit Radius r. Innerhalb der Spule: Gesamtstrom NI. Außerhalb der Spule: Gesamtstrom 0. Außen: $B_\varphi = 0$. Innen:

$$\oint_{\partial F} \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{j} \quad \rightarrow \quad 2\pi r B_\varphi = \frac{4\pi}{c}(-I)N \quad \rightarrow \quad B_\varphi = -\frac{2}{c}\frac{IN}{r}$$

b) Fluss für eine Windung:

$$\Phi_1 = \int \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{B} = \int_0^b \mathrm{d}z \int_{R_0}^{R_0+a} \mathrm{d}y \frac{2IN}{cy} = \frac{2INb}{c} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Selbstinduktion für Gesamtfluss $\Phi_N = N\Phi_1$:

$$L = \frac{1}{c}\Phi_N \frac{1}{I} = \frac{2N^2 b}{c^2} \ln \frac{R_0 + a}{R_0}$$

Abschätzung: $L > L(a \leftrightarrow b) \quad \rightarrow \quad b \ln \frac{R_0+a}{R_0} > a \ln \frac{R_0+b}{R_0}$, mit Substitution $b = R_0(\exp(\tilde{b}) - 1) > 0$, $a = R_0(\exp(\tilde{a}) - 1) > 0$ ($b > a \Leftrightarrow \tilde{b} > \tilde{a}$) verschwinden Logarithmen: $R_0(\exp(\tilde{b}) - 1)\tilde{a} > R_0(\exp(\tilde{a}) - 1)\tilde{b} \rightarrow \frac{\exp(\tilde{b})-1}{\tilde{b}} > \frac{\exp(\tilde{a})-1}{\tilde{a}}$, Taylor-Entwicklung $1 + \frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\tilde{b}^2}{3!} + ... > 1 + \frac{\tilde{a}}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{3!} + ...$ ist erfüllt für $\tilde{b} > \tilde{a}$ und somit $b > a$. D.h. die ursprüngliche Orientierung hat die größere Selbstinduktion.

11.2 Permanent magnetisierter Zylinder

a) Im Inneren $r < a$ gilt: $\vec{j}_M(\vec{r}) = c\,\mathrm{rot}\vec{M}(\vec{r}) = c\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_\varphi(r))\,\vec{e}_z$ mit $M_\varphi(r) = M_0\frac{r^2}{a^2}$. $\Rightarrow \vec{j}_M(\vec{r}) = 3M_0 c\frac{r}{a^2}\vec{e}_z$.

Am Rand $r = a$ gilt: $\vec{k}_M = c\,\mathrm{Rot}\vec{M} = c\left(\vec{n} \times \underbrace{\vec{M}_a}_{\vec{0}}\right) - c\left(\underbrace{\vec{n}}_{\vec{e}_r} \times \underbrace{\vec{M}_i}_{M_0\vec{e}_\varphi}\right) = -M_0 c\vec{e}_z$

Gesamtstrom: $2\pi \int_0^a \mathrm{d}r\, r3M_0c\frac{r}{a^2} + 2\pi a(-M_0c) = 2\pi M_0ca - 2\pi M_0ca = 0$.

b) <u>Lösungsweg 1</u>: Aus Symmetriegründen gilt $\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r)\vec{e}_\varphi$.
Integrale Form des Oerstedschen Gesetzes: $\oint_{\partial F} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int_F \vec{j}_M(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{f}\,'$.

$$2\pi r B_\varphi(r) = \begin{cases} \frac{1}{c}3M_0c\frac{1}{a^2}2\pi\int_0^r \mathrm{d}r'\, r'^2 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \qquad B_\varphi(r) = \begin{cases} 4\pi M_0\frac{r^2}{a^2} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} 4\pi\vec{M}(\vec{r}) - 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \vec{0} \\ \vec{0} - \vec{0} = \vec{0} \end{cases} \qquad \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ im ganzen Raum.}$$

<u>Lösungsweg 2</u>: $\vec{H}(\vec{r}) = 0$ kann man sich auch folgendermaßen überlegen:

Für $r < a$: $\mathrm{div}\vec{H} = \underbrace{\mathrm{div}\vec{B}}_{0} - 4\pi\underbrace{\mathrm{div}\vec{M}}_{0} = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \vec{0}.$

Für $r > a$: $\mathrm{div}\vec{H} = \mathrm{div}\vec{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \vec{0}$. (auch keine Quellen / Wirbel im Unendlichen)
Für $r = a$: $\mathrm{Div}\vec{H} = \mathrm{Div}\vec{B} - 4\pi\mathrm{Div}\vec{M} = 0, \qquad \mathrm{Rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{k} = \vec{0}.$

Daher muss gelten $\vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{B}(\vec{r}) = 4\pi\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} 4\pi M_0 \frac{r^2}{a^2}\vec{e}_\varphi & r < a \\ \vec{0} & r > a \end{cases}$

11.3 Verzögerungsplatte

$+45°$ linear polarisiertes Licht als Superposition von 2 linear polarisierten Wellen gleicher Phase schreiben, mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$:
$\vec{E}(\vec{r},t) = E_x\vec{e}_x \cos(k_1 z - \omega t + \varphi) + E_y\vec{e}_y \cos(k_2 z - \omega t + \varphi)$
Vor dem Eintritt $z < 0$ gilt $k_1 = k_2$. Nach dem Eintritt $0 \le z \le d$: Brechungsindizes: $k_1 c/\omega = n_x$, $k_2 c/\omega = n_y$.
Zirkular polarisiert: Eine Komponente nach Strecke $z = d$ um $\pm\pi/2$ verschoben. Wenn y-Komponente um $+\pi/2$ $(-\pi/2)$ verschoben wird, dann ist $\cos(\alpha \pm \pi/2) = \mp\sin(\alpha)$, also eine linkszirkular (rechtszirkular) polarisierte Welle.
$n_x\omega d/c - \omega t + \varphi = n_y\omega d/c - \omega t + \varphi \pm \pi/2 \quad \Rightarrow \quad (n_x - n_y)\,\omega d/c = \pm\pi/2$. Mit $\omega/c = 2\pi/\lambda$ folgt

$$d = \pm\frac{\pi}{2}\frac{c}{\omega}\frac{1}{n_x - n_y} = \pm\frac{\lambda}{4}\frac{1}{n_x - n_y}$$

Bei doppelt so dicker Verzögerungsplatte erhält eine Komponente die umgekehrte Phase $\cos(\alpha + 2\pi/2) = -\cos(\alpha)$. Das Ergebnis ist eine um -45° gegenüber der x-Achse geneigte linear polarisierte Welle.
Bei einer dreifach so dicken Verzögerungsplatte erhält man wieder eine zirkular polarisierte Welle, diesmal in die andere Richtung drehend.

11.4 Metallischer Spiegel

a) Ansatz:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \left[E_0^+\cos(kz - \omega t) + E_0^-\cos(-kz - \omega t)\right]\vec{e}_x, \\ \vec{B}(z,t) &= \vec{e}_z \times \vec{E}^+(z,t) + (-\vec{e}_z) \times \vec{E}^-(z,t) = \left[E_0^+\cos(kz - \omega t) - E_0^-\cos(-kz - \omega t)\right]\vec{e}_y. \end{aligned}$$

Ansatz erfüllt Feldgleichungen für $x < 0$. Randbedingungen: $\mathrm{Div}\vec{B} = 0 \Rightarrow B_z(0,t) = 0$ ist erfüllt. $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$ $\Rightarrow E_y(0,t) = 0$ ok, $E_x(0,t) = 0 \Rightarrow E_0^+ = -E_0^-$.

$$\begin{aligned} \cos(kz - \omega t) - \cos(kz + \omega t) &= \cos(kz)\cos(\omega t) + \sin(kz)\sin(\omega t) - [\cos(kz)\cos(\omega t) - \sin(kz)\sin(\omega t)] \\ &= 2\sin kz \sin\omega t \\ \cos(kz - \omega t) + \cos(kz + \omega t) &= 2\cos kz\cos\omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= 2E_0^+\sin kz\sin\omega t\vec{e}_x, \\ \vec{B}(z,t) &= 2E_0^+\cos kz\cos\omega t\vec{e}_y. \end{aligned}$$

b) $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma \Rightarrow -\underbrace{E_z(0,t)}_{=0} = 4\pi\sigma \Rightarrow \sigma = 0.$

$\mathrm{Rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{k} \Rightarrow -\vec{e}_z \times \vec{B}(0,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{k}$ mit $\vec{B}(0,t) = 2E_0^+\cos\omega t\vec{e}_y \Rightarrow \vec{k} = \frac{c}{2\pi}E_0^+\cos\omega t\vec{e}_x$. (Wechselstrom in x-Richtung)
c) Energiedichte:
$w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \frac{1}{8\pi}4\left(E_0^+\right)^2\left[\sin^2 kz\sin^2\omega t + \cos^2 kz\cos^2\omega t\right].$
$\underbrace{\sin^2 kz}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2kz)}\sin^2\omega t + \underbrace{\cos^2 kz}_{\frac{1}{2}(1+\cos 2kz)}\cos^2\omega t = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{1} + \cos 2kz\,\big(\underbrace{\cos^2\omega t - \sin^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\big)\Big]$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2kz \cos 2\omega t\right].$
$w_{em} = \frac{1}{4\pi}\left(E_0^+\right)^2 \left[1 + \cos 2kz \cos 2\omega t\right]$
Zeitmittel über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$: $\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{4\pi}\left(E_0^+\right)^2$
Energiestromdichte (Poyntingvektor):
$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \frac{c}{4\pi} 4\left(E_0^+\right)^2 \vec{e}_z \underbrace{\sin kz \cos kz}_{\frac{1}{2}\sin 2kz} \underbrace{\sin \omega t \cos \omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} = \frac{c}{4\pi}\left(E_0^+\right)^2 \vec{e}_z \sin 2kz \sin 2\omega t.$

Zeitmittel: $\left\langle \vec{S} \right\rangle = 0.$