12. Tutorium - Lösungen **27.06.2014**

12.1 Kräfte zwischen Kreis- und Linienstrom

Gegeben sei ein unendlich langer dünner Leiter L_1, der im Abstand $x = d$ parallel zur y-Achse verläuft und von einem zeitlich konstanten Strom I_1 durchflossen wird.
a) Berechne das Magnetfeld und daraus ein Vektorpotential.
Zylinderkoordinaten werden entlang der y-Achse angewendet $(x, y, z \rightarrow z, x, y)$:

$$z = r\cos\varphi, \qquad x = r\sin\varphi, \qquad y = y, \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_z + \cos\varphi\vec{e}_x = -\frac{x}{r}\vec{e}_z + \frac{z}{r}\vec{e}_x$$

Translationsinvarianz bezüglich y-Achse liefert $B_i(r,\varphi,y) = B_i(r,\varphi)$, und $B_y = 0$. Außerdem gilt $B_r = 0$ wegen $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ oder in Integralform $\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{f} = 0 = 2B_r\pi r l$. Bleibt also B_φ zu berechnen. Für $\vec{B} = B_\varphi\vec{e}_\varphi$ erhält man:

$$\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}\mathrm{d}\vec{f} \qquad \rightarrow \qquad 2\pi r B_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c}I_1 \qquad \rightarrow \qquad B_\varphi(r) = \frac{2I_1}{cr}$$

$$\vec{B} = \frac{2I_1}{cr}\vec{e}_\varphi = \frac{2I_1}{c}\left(\frac{z}{z^2+x^2}, 0, -\frac{x}{z^2+x^2}\right) \qquad \xrightarrow{x\to x-d} \vec{B} = \frac{2I_1}{c}\left(\frac{z}{z^2+(x-d)^2}, 0, \frac{d-x}{z^2+(x-d)^2}\right).$$

Berechnung des Vektorpotentials über $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. Mit $\vec{A} \sim A_y(r)$ folgt $-\partial A_y/\partial r = B_\varphi$, und somit $A_y = (-2I_1/c)\ln r + c$.

$$A_y = -\frac{I_1}{c}\ln\left[z^2 + (x-d)^2\right].$$

b) Betrachte zusätzlich einen dünnen Leiter L_2, welcher einen Kreis mit Radius $a < d$ und Mittelpunkt im Ursprung bildet und ebenfalls in der x-y-Ebene liegt. Dieser werde von einem konstanten Strom I_2 durchflossen. Berechne die auf den Leiter L_2 wirkende Kraft $\vec{F}$.
Kraft auf Leiter: $\vec{F} = \frac{I_2}{c}\int_{L_2}\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B}(r)$, mit $\vec{r} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$. $\mathrm{d}\vec{r} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)a\mathrm{d}\varphi$, und $\vec{B}_1(z = 0) = (0, 0, 2I_1/(c(d-x)))$

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\int \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{d-x} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi} \\ \frac{\sin\varphi}{d-a\cos\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{2I_1I_2}{c^2}a\left[\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi} + \int_\pi^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{d-a\cos\varphi}\right] \\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}\frac{a}{d}\left[\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{1-\frac{a}{d}\cos\varphi} - \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{1+\frac{a}{d}\cos\varphi}\right] \\
&= \frac{2I_1I_2}{c^2}\frac{a}{d}\frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{a^2}{d^2}}}\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{d^2}}-1}{-\frac{a}{d}} \times 2 \\
&= \frac{4\pi}{c^2}I_1I_2\frac{d-\sqrt{d^2-a^2}}{\sqrt{d^2-a^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_y &\sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} + \int_\pi^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\sin\varphi}{d - a\cos\varphi} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d - ax} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d + ax} = 2a \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{d^2 + a^2x^2} = 0
\end{aligned}
$$

Hier wurde der Hinweis verwendet: $\int_0^\pi \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}-1}{\alpha}$ für $|\alpha| < 1$.

12.2 Kartesische Multipolmomente eines Quaders

Ladungsverteilung:
$\rho(\vec{r}) = \rho_0\theta(a-x)\theta(a+x)\theta(b-y)\theta(b+y)\theta(c-z)\theta(c+z)$.
Gesamtladung:
$q = \int \rho(\vec{r})dV = 8abc\rho_0$.
Dipolmoment:
$\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})dV = 0$.
Quadrupolmoment:
$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}) \left(3x_ix_j - r^2\delta_{ij}\right) dV$.
Diagonalelemente:
$Q_{11} = \int \rho(\vec{r}) \left(3x^2 - \left[x^2 + y^2 + z^2\right]\right) dV$
$= \rho_0 \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \int_{-c}^c dz \left(2x^2 - y^2 - z^2\right)$
$= \rho_0 \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \left(2x^2z - y^2z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{z=-c}^{c}$
$= \rho_0 \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \left(4cx^2 - 2cy^2 - \frac{2c^3}{3}\right)$
$= \rho_0 \int_{-a}^a dx \left(8bcx^2 - \frac{4cb^3}{3} - \frac{4bc^3}{3}\right)$
$= \rho_0 \frac{16a^3bc - 8ab^3c - 8abc^3}{3}$
$= q\frac{2a^2-b^2-c^2}{3}$.
Analog erhält man Q_{22} und Q_{33}.
Nicht-Diagonalelemente:
$Q_{12} = \int \rho(\vec{r})3xydV$
$= \rho_0 \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \int_{-c}^c dz 3xy$
$= 0$.
Analog verschwinden die anderen Nicht-Diagonalelemente.

12.3 Nicht ganz paralleler Plattenkondensator

a) Unter Vernachlässigung von Randeffekten ist das Problem ein zweidimensionales. Wir legen Zylinderkoordinaten so in das System, dass sich die gedachte Fortsetzung der Plattenebenen sich in der Zylinderache schneiden. Das Potential hängt dann nur vom Zylinderwinkel ϑ ab.
Laplace-Gleichung in Zylinder-Koordinaten:
$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{d\vartheta^2} = 0$.
Allgemeine Lösung: $\phi(\vartheta) = A + B\vartheta$.
Randbedingungen: $\phi(0) = 0$, $\phi(\vartheta_0) = V$.
Daher: $A = 0$, $B = U/\vartheta_0$.
In kartesische Koordinaten umgewandelt:
$\vartheta = \arctan\left[\frac{y}{x+\frac{bd}{a}}\right]$.
$\phi(x,y) = \frac{V\vartheta}{\vartheta_0} = U\frac{\arctan\left[\frac{y}{x+\frac{bd}{a}}\right]}{\arctan\left[\frac{a}{b}\right]}$.

b) Q sei die Gesamtladung auf der unteren Platte. Das elektrische Feld zwischen den Platten ist gegeben durch
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\frac{\vec{e}_\vartheta}{r} = -\frac{V}{\vartheta_0 r}\vec{e}_\vartheta$.
Für einen Punkt $\vec{r} = (x, 0)$ auf der unteren Platte gilt $\vartheta = 0$, $r = \frac{bd}{a} + x$. $\vec{E}$ ist normal zur Platte.
Flächenladungsdichte erhält man wie folgt:
$\sigma = \frac{1}{4\pi}\vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \frac{1}{4\pi}\vec{n} \cdot \left(\epsilon\vec{E}_2\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{U\epsilon}{\vartheta_0\left(\frac{bd}{a}+x\right)}$.
Gesamtladung:
$Q = \int \sigma d^2 f = -\frac{1}{4\pi}\int_0^c dz \int_0^b \frac{U\epsilon}{\vartheta_0\left(\frac{bd}{a}+x\right)}dx = -\frac{\epsilon U c}{\arctan\frac{a}{b}}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$.
Kapazität:
$C = \frac{|Q|}{U} = \frac{\epsilon c}{\arctan\frac{a}{b}}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$.