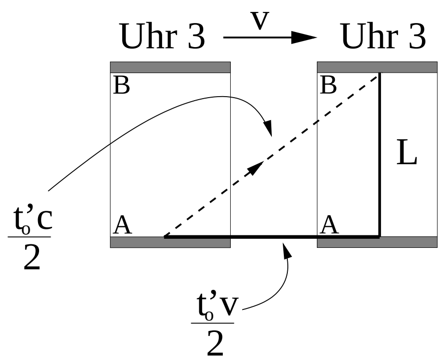
1. Tutorium - Lösungen **07.03.2014**

1.1 Zeitdilatation und Längenkontraktion

a) Zwischen zwei Ticks der beiden ruhenden Uhren 1 und 2 vergeht die Zeit $t_0 = \frac{2L}{c}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Sei t'_0 der zeitliche Abstand im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2, den der Lichtblitz in der bewegten Uhr 3 benötigt, um von Spiegel A nach Spiegel B und wieder zurück zu Spiegel A zu laufen. Während der Laufzeit von Spiegel A nach Spiegel B in Uhr 3, $t'_0/2$, hat sich Spiegel B bereits um die Strecke $t'_0 v/2$ weiterbewegt. Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich sofort

$$L^2 + \left(\frac{t'_0 v}{2}\right)^2 = \left(\frac{t'_0 c}{2}\right)^2 \qquad \text{oder} \qquad t'_0 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} t_0 \; .$$



Im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 geht Uhr 3 also um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$ langsamer ($v < c!$) als die beiden ruhenden Uhren. Genauer gesagt, wenn Uhr 3 im Moment, indem sie sich am Ort von Uhr 1 befindet, den gleichen Zählerstand hat wie Uhr 2, so ist ihr Zählerstand im Moment, in dem sie sich am Ort von Uhr 2 befindet um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ geringer als der von Uhr 2.

b) Es sei L' der Spiegelabstand von Uhr 3 im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2. Angenommen, der Lichtstrahl braucht im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 die Zeit t'_1, um in Uhr 3 von Spiegel A nach Spiegel B zu laufen. Weil B in dieser Zeit die Strecke vt'_1 zurückgelegt hat gilt

$$L' + vt'_1 = ct'_1 \qquad \text{oder} \quad t'_1 = \frac{L'}{c-v}.$$

Für die Laufzeit t'_2, die das Licht von B nach A benötigt, ergibt sich analog

$$t'_2 = \frac{L'}{c+v}.$$

Die Periodendauer t'_0 der bewegten Uhr 3 ist damit im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2

$$t'_0 = t'_1 + t'_2 = \frac{2L'}{c(1-\frac{v^2}{c^2})}. \tag{1}$$

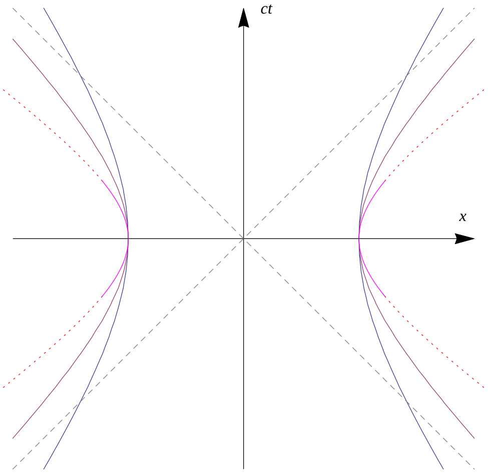
Die Forderung aus der Aufgabenstellung, dass Uhr 3 um den selben Faktor langsamer geht wie in Teil (a) (die Zeitdilatation hängt alleine von der Relativbewegung beider Bezugssystemen ab), ist also

$$t'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} t_0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{2L'}{c(1-\frac{v^2}{c^2})} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{2L}{c} \qquad \text{oder} \quad L' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} L.$$

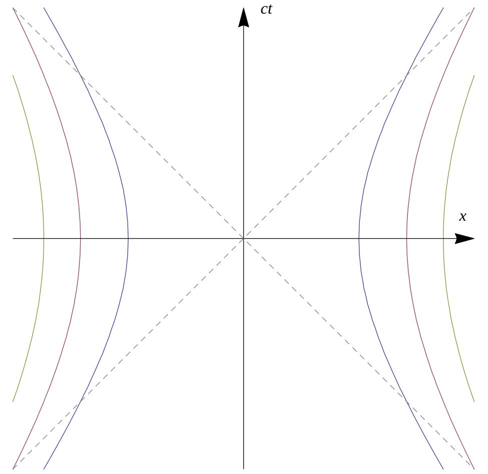
Der Abstand zwischen den beiden Spiegeln der Uhr 3 erscheint im Ruhesystem von Uhr 1 und Uhr 2 also verkleinert.

1.2 Minkowski-Diagramm

a) $s^2 = \alpha^2 t^2 - x^2$.
$x(t) = \sqrt{\alpha^2 t^2 - s^2}$, Geschwindigkeit: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 t^2 - s^2}} \alpha^2 2t$.
Lösen von $\left| \frac{\alpha^2 t}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - s^2}} \right| \leq c$:
$\alpha^2 |t| \leq c\sqrt{\alpha^2 t^2 - s^2} \quad \rightarrow \quad \alpha^4 t^2 \leq c^2 \alpha^2 t^2 - c^2 s^2 \quad \rightarrow \quad c^2 s^2 < 0 \leq \alpha^2 \left(c^2 - \alpha^2\right) t^2$.
$\rightarrow \alpha^2 \leq c^2$.
b) Minkowski-Diagramm für $s^2 = -1$ und $\alpha^2 = 2c^2$, c^2 und $\frac{c^2}{2}$ (von außen nach innen). Für $\alpha^2 = 2c^2$ wird die Lichtgeschwindigkeit überschritten, was durch die punktierter Linie angedeutet ist.



Minkowski-Diagramm für $\alpha^2 = \frac{c^2}{2}$ und $s^2 = -1, -2, -3$ (von innen nach außen).



1.3 Vierervektoren

a) $\Lambda^\mu{}_\tau(\beta)\Lambda'^\tau{}_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & 0 & -\beta'\gamma' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & 0 & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\beta\gamma & 0 & -\beta'\gamma\gamma' \\ -\beta\gamma\gamma' & \gamma & 0 & \beta\beta'\gamma\gamma' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & 0 & \gamma' \end{pmatrix}$.

$\Lambda'^\mu{}_\tau(\beta)\Lambda^\tau{}_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & 0 & -\beta'\gamma' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & 0 & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -\beta\gamma\gamma' & 0 & -\beta'\gamma' \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta'\gamma\gamma' & \beta\beta'\gamma\gamma' & 0 & \gamma' \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$kommutieren nicht.

b) $$\Lambda^\mu{}_\tau(\beta)D'^\tau{}_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma\cos\alpha & \beta\gamma\sin\alpha & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma\cos\alpha & -\gamma\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D'^\mu{}_\tau(\alpha)\Lambda^\tau{}_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma\cos\alpha & \gamma\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ -\beta\gamma\sin\alpha & \gamma\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow$kommutieren nicht.

c) $$D^\mu{}_\tau(\alpha)D'^\tau{}_\nu(\alpha') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\sin\alpha' & 0 \\ \sin\alpha' & \cos\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\sin\alpha' & 0 \\ \cos\alpha\sin\alpha' & \cos\alpha\cos\alpha' & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\alpha' & \sin\alpha\cos\alpha' & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$$D'^\mu{}_\tau(\alpha')D^\tau{}_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\sin\alpha' & 0 \\ \sin\alpha' & \cos\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha' & -\cos\alpha\sin\alpha' & \sin\alpha\sin\alpha' \\ \sin\alpha' & \cos\alpha\cos\alpha' & -\sin\alpha\cos\alpha' \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow$kommutieren nicht.

d) $$D^\mu{}_\tau(\alpha)D^\tau{}_\nu(\alpha') = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\sin\alpha' \\ \sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' & -\cos\alpha\sin\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha' \\ \sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha' & -\sin\alpha\sin\alpha' + \cos\alpha\cos\alpha' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\alpha') & -\sin(\alpha+\alpha') \\ \sin(\alpha+\alpha') & \cos(\alpha+\alpha') \end{pmatrix} = D^\mu{}_\nu(\alpha+\alpha').$$

$$D'^\mu{}_\tau(\alpha')D^\tau{}_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\sin\alpha' \\ \sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' & -\cos\alpha\sin\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha' \\ \sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha' & -\sin\alpha\sin\alpha' + \cos\alpha\cos\alpha' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\alpha') & -\sin(\alpha+\alpha') \\ \sin(\alpha+\alpha') & \cos(\alpha+\alpha') \end{pmatrix} = D^\mu{}_\nu(\alpha+\alpha').$$

$\rightarrow$diese kommutieren.

e) Man kann die Drehung um die x-Achse ansetzen:

$$\Lambda^\mu{}_\tau(\beta)D^\tau{}_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$$D^\mu{}_\tau(\alpha)\Lambda^\tau{}_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$