2. Tutorium - Lösungen **14.03.2014**

2.1 Kontrahierte Leiter

a) Aus der Sicht des Abstellraumes S':
Länge des Abstellraumes: $l' = l_0 = 1$ m
Länge der Leiter: $L' = L_0/\gamma$. Mit $\beta = v/c = \sqrt{3}/2$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 2$ folgt $L' = 1$ m.
Weltkarte von S' für jenen Zeitpunkt, zu dem Leiteranfang A die Wand berührt, zeigt, dass das Ende der Leiter E gerade in den Abstellraum hineinpasst, und man daher die Türe schließen kann. Nachdem die Leiter zum Stillstand gekommen ist, wird sie die Tür aufsprengen oder (und) sich deformieren.
Aus der Sicht der Leiter im Ruhesystem S:
Länge des Abstellraumes: $l = l_0/\gamma = 0,5$ m
Länge der Leiter: $L = L_0 = 2$ m.
Weltkarte von S für jenen Zeitpunkt, zu dem die Wand W die Leiter an deren Anfang A berührt, scheint zu zeigen, dass die Leiter nicht hineingeht.
Lösung des „Paradoxons“: Wegen der endlichen Signalgeschwindigkeit c physikalischer Wirkungen kann das Ende der Leiter E zunächst nichts davon wissen, dass die Wand W bei A angestoßen ist. E bleibt daher in S solange in Ruhe, bis von A nach E ein Signal (in Form einer Stoßwelle) gelaufen ist, welches E sagt, „Wir müssen mit“. In der Zwischenzeit wird aber A von W „mitgenommen“. E bleibt in Ruhe, bis die Zeit $t_s = 2\,\mathrm{m}/(3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}) = 2/c$ vergangen ist. In dieser Zeit läuft aber die Frontseite F des Abstellraumes die Strecke $s_F = vt_x = \frac{c\sqrt{3}}{2}\frac{2}{c} = \sqrt{3}\,\mathrm{m} \approx 1,732\,\mathrm{m} > 1,5\,\mathrm{m}$!
b) Die Leiter geht sogar „recht bequem“ hinein. Sie würde sogar noch hineingehen, wenn sie die Ruhelänge $0,5\,\mathrm{m} + v(L_0/c) = L_0$, oder $L_0 = 0,5\,\mathrm{m}/(1-\beta) = 1/(2-\sqrt{3})\,\mathrm{m} \approx 3,732\,\mathrm{m}$ hätte!
Anders betrachtet: Der Abstellraum könnte im Falle einer $L_0 = 2\,\mathrm{m}$ langen Leiter noch kürzer sein. Die minimale Länge l_{min} des Abstellraumes in S liegt dann vor, wenn das „Wettrennen“ von der Abstellraumfront F (Geschwindigkeit v) mit dem Signal $A \to E$ (Geschwindigkeit c) gerade „unentschieden“ ausgeht, also

$$\frac{2\,\mathrm{m} - l_{\mathrm{min}}}{v} = \frac{2\,\mathrm{m}}{c}$$

also $l_{min} = 2 - 2\frac{v}{c} = (2-\sqrt{3})\,\mathrm{m}$. $\Rightarrow l_{0,\mathrm{min}} = \gamma l_{\mathrm{min}} = 2(2-\sqrt{3})\,\mathrm{m} \approx 0,536\,\mathrm{m}$.
Das Geschehen für $l_{0,\mathrm{min}}$ aus der Sicht des Gesellen in S':
Berührt A zum ersten Mal die Wand, so „weiß“ E noch nichts davon, läuft also noch unverändert in den Abstellraum hinein. Das kleinstmögliche $l_0 = l_{0,\mathrm{min}}$ für das eine $L_0 = 2\,\mathrm{m}$ Leiter gerade hineingeht, liegt dann vor, wenn das Leiterende von E nach F (Geschwindigkeit v) mit dem Signal A (bzw. W) nach F (Geschwindigkeit c) zusammentrifft:

$$\frac{1\,\mathrm{m} - l_{0,\mathrm{min}}}{v} = \frac{l_{0,\mathrm{min}}}{c}$$

$l_{0,\mathrm{min}} = 1\,\mathrm{m}/(1+\frac{v}{c}) = 2/(2+\sqrt{3})\,\mathrm{m} = 2(2-\sqrt{3})\,\mathrm{m} \approx 0,536\,\mathrm{m}$ wie gehabt.
c) Zum selber Zeichnen.

2.2 Vorbeiflug zweier Stäbe

a) Stab 2 ist in S_1 lorentzkontrahiert auf Länge $L = L_0/\gamma(v)$. Zurückzulegende Strecke (=Differenz zum ruhenden Stab) beträgt $v\Delta t = L_0 - L = L_0\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = L_0\left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$.

$1 - \frac{v\Delta t}{L_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

$1 - 2\frac{v\Delta t}{L_0} + \left(\frac{v\Delta t}{L_0}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$.

$-2\frac{\Delta t}{L_0} + \frac{v(\Delta t)^2}{L_0^2} = -\frac{v}{c^2}$.
$v\left((\Delta t)^2 + \frac{L_0^2}{c^2}\right) = 2L_0\Delta t$.
$v = \frac{2L_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + \frac{L_0^2}{c^2}}$.
Bei gegebenem L_0 wird $(\Delta t)_{max}$ für $v \to c$, $\gamma \to \infty$ erreicht: $(\Delta t)_{max} = \frac{L_0}{c}$.
b) Zum selber Zeichnen. Einheitshyperbel nicht vergessen, um L_0 einzutragen.
In S: E_3, E_1, E_4, E_2.
In S': E_3, E_4, E_1, E_2.
c) Es gibt S'', da E_1 und E_4 raumartig liegen. In S'' sind die Stäbe gleich lang.
Geschwindigkeit u von S'' gegenüber S ist gleich der Geschwindigkeit u von S' gegenüber S''. Geschwindigkeitsadditionstheorem:
$v = \frac{u+u}{1+\frac{uu}{c^2}}$.
$v\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) = 2u$.
$u^2 - 2\frac{uc^2}{v} + c^2 = 0$.
$u_{1,2} = \frac{c^2}{v} \pm \sqrt{\frac{c^4}{v^2} - c^2} = \frac{c^2}{v}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{c^2}{v}\left[1 \pm \left(1 - \frac{v\Delta t}{L_0}\right)\right]$.
$u_1 = \frac{c^2}{v}\left[2 - \frac{v\Delta t}{L_0}\right] = \frac{2c^2}{v} - \frac{c^2\Delta t}{L_0} = \frac{c^2}{L_0\Delta t}\left((\Delta t)^2 + \frac{L_0^2}{c^2}\right) - \frac{c^2\Delta t}{L_0} = \frac{L_0}{\Delta t}$.
$u_2 = \frac{c^2\Delta t}{L_0}$.
u_1 liefert für kleine Δt das falsche Verhalten. u_2 ist die Lösung.
Es existiert kein S''', da E_2 in der universellen Zukunft von E_3 liegt.

2.3 Allgemeine Lorentz-Transformation

a) $\Lambda'^{\mu}{}_{\tau}(\beta)\Lambda^{\tau}{}_{\nu}(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 & -\beta\gamma^2 & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma^2 & \beta^2\gamma^2 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Da diese Matrix nicht symmetrisch ist, kann es keine reine Geschwindigkeitstransformation sein, denn für diese gilt: $\left(R\Lambda R^{-1}\right)^T = \left(R\Lambda R^T\right)^T = R^{T^T}\Lambda^T R^T = R\Lambda R^T = R\Lambda R^{-1}$, d.h. eine reine Geschwindigkeitstransformation wäre symmetrisch - ihre Transponierte ist gleich der Matrix selbst.
b) $D^{\mu}{}_{\sigma}(\delta)\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}(\beta')D^{\tau}{}_{\nu}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ 0 & \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma' & -\beta'\gamma & 0 & 0 \\ -\beta'\gamma' & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ 0 & \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma' & -\beta'\gamma'\cos\alpha & \beta'\gamma'\sin\alpha & 0 \\ -\beta'\gamma' & \gamma'\cos\alpha & -\gamma'\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \gamma' & -\beta'\gamma'\cos\alpha & \beta'\gamma'\sin\alpha & 0 \\ -\beta'\gamma'\cos\delta & \gamma'\cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta & -\gamma'\sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta & 0 \\ -\beta'\gamma'\sin\delta & \gamma'\cos\alpha\sin\delta + \sin\alpha\cos\delta & -\gamma'\sin\alpha\sin\delta + \cos\alpha\cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Vergleich ausgewählter Komponenten der Matrizen aus (a) und (b):
$\gamma^2 = \gamma' \quad \to \quad \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}} \quad \to \quad \beta'^2 = 1 - \left(1-\beta^2\right)^2 = 2\beta^2 - \beta^4$
$\to \quad \beta' = \beta\sqrt{2-\beta^2}$.
$-\beta\gamma^2 = -\beta'\gamma'\sin\delta$.
$\to \quad \sin\delta = \frac{\beta\gamma^2}{\beta'\gamma'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{1}{\sqrt{2-\beta^2}}$
Alternativ: $\tan\delta = \frac{-\beta'\gamma'\sin\delta}{-\beta'\gamma'\cos\delta} = \frac{-\beta\gamma^2}{-\beta\gamma} = \gamma$.
$-\beta\gamma = -\beta'\gamma'\sin\alpha$.

$\rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{-\beta\gamma}{\beta'\gamma'} = \frac{-\beta}{\beta'\gamma} = -\frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{2\beta^2-\beta^4}} = -\sqrt{\frac{1-\beta^2}{2-\beta^2}}.$

Alternativ: $\tan\alpha = \frac{\beta'\gamma'\sin\alpha}{-\beta'\gamma'\cos\alpha} = \frac{\beta\gamma}{-\beta\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}.$