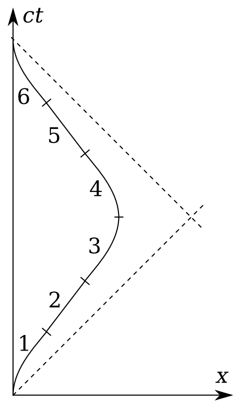
3. Tutorium **für 21.03.2014**

3.1 Zwillingsparadoxon

Während ein Zwilling auf der Erde studiert, reist seine Zwillingsschwester wie in nebenstehender Abbildung gezeigt durchs sonnige Universum: Die Abschnitte (1), (3), (4), (6) sind jeweils Pfade konstanter Beschleunigung in ihrem jeweiligen momentanen Ruhesystem, während die Abschnitte (2) und (5) gleichförmige Bewegung beschreiben.



a) Wie verhalten sich die Eigenzeitintervalle $\Delta\tau_E$ und $\Delta\tau_R$ zueinander, die auf der Erde bzw. in der Rakete vergangen sind, wenn sich die Zwillinge wieder treffen? Dabei möchte die Zwillingsschwester auf ihrer Reise insgesamt die gleiche Zeitdauer (aus der Sicht des Bezugssystems der Erde) beschleunigen wie sie gleichförmig bewegt fliegt. Wie groß sind die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$ und die maximale Entfernung $x_{\max}$, die sie dabei erreicht?

b) Berechne $\Delta\tau_R$, $\Delta\tau_E - \Delta\tau_R$, $v_{\max}$, und $x_{\max}$ für die konstante Beschleunigung $g_0 = 9,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ für den Fall, dass auf der Erde 1 Jahr, 10 Jahre, 20 Jahre vergehen.

c) Die Schwester will mit der gleichen Treibstoffmenge noch weiter fliegen, also verlängert sie die Reiseabschnitte gleichförmiger Bewegung (2) und (5). Zeige, dass im Grenzfall sehr langer Reisen gilt

$$\Delta\tau_R = \frac{\Delta\tau_E}{\gamma(v_{\max})}.$$

3.2 Relativistische Raketen

Zwei Raketen A und B bewegen sich in einem Inertialsystem S entlang der x-Achse gemäß

$$\begin{aligned}
\text{Rakete A:} \quad x_A(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ v_\infty T\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{T^2}} - 1\right) & \text{für } t \geq 0, \end{cases} \\
\text{Rakete B:} \quad x_B(t) &= v_B t,
\end{aligned}$$

mit vorgegebenen $v_\infty, v_B > 0$, $T > 0$.
a) Die Raketen treffen sich im Ursprung von S. Unter welcher Bedingung treffen sie sich ein zweites Mal? Berechne den Zeitpunkt dieses zweiten Treffens gemessen im Inertialsystem S und zeichne die Weltlinien der beiden Raketen in ein Minkowski-Diagramm.
b) Die Uhren beider Raketen werden beim ersten Treffen auf Null gestellt. Berechne die Zeitangaben der beiden Uhren zum Zeitpunkt des zweiten Treffens für den Spezialfall $v_\infty = c$ als Funktion von T und v_B.
Hinweis: Benutze dazu das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \mathrm{Arsinh}\, z\,.$$

c) Berechne die Viererbeschleunigung b'^μ im jeweiligen momentanen Ruhesystem der Rakete A als Funktion von v_∞, T und der Zeit t im Inertialsystem S. (Hinweis: Zeige zunächst, dass die Viererbeschleunigung für kollineare v und a allgemein als $a^\mu = \gamma^4(v)(\frac{va}{c}, a)$ geschrieben werden kann. Transformiere diese dann vom Inertialsystem S ins momentane Ruhesystem der Rakete A.)

3.3 Sternenhimmel

Ein Beobachter in einem Raumschiff sieht, wenn er relativ zu den Fixsternen ruht, eine isotrope Verteilung von Sternen, d.h. die Zahl der Sterne, die er in einem Raumwinkelelement $d\Omega$ sieht, ist $Pd\Omega = \frac{N}{4\pi}d\Omega$, wobei N die Gesamtzahl der für ihn sichtbaren Sterne ist. Wenn er sich dagegen gleichförmig mit einer relativistischen Geschwindigkeit $v = c\beta$ bewegt, dann sei $P'(\theta', \varphi')d\Omega'$ die Zahl der Sterne, die er im Raumelement $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$ sieht.
a) Berechne P' als Funktion von θ', φ' unter der Annahme, dass er in Bewegung jeden Stern sieht, den er auch in Ruhe sieht.
Hinweis: Verwende den Lorentz-transformierten Viererimpuls der von den Sternen ausgesendeten Photonen, um eine Beziehung zwischen $\cos\theta$ und $\cos\theta'$ zu erhalten.
b) Was sieht er im Grenzfall $\beta \to 1$ in und entgegengesetzt zur Flugrichtung?

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2ab, 2c, 3ab