3. Tutorium - Lösungen **21.03.2014**

3.1 Zwillingsparadoxon

Eigenzeit: $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\mathrm{d}t$. Hyperbolische Bewegung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right), \\ v(t) &= \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}, \\ \Delta\tau &= \frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_2}{c} - \frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_1}{c} \end{aligned}$$

Im System der Erde S vergeht folgende Zeit für $0 \le t \le 8t_0$, wobei die Dauer $4t_0$ beschleunigt wird, und $4t_0$ gleichförmig bewegt wird (also $4\times t_0$ Beschleunigungsteile und $2\times(2t_0)$ unbeschleunigte Teile):

$$\begin{aligned} x_E(t) &= 0, \\ v_E(t) &= 0, \\ \Delta\tau_E &= 8t_0 \end{aligned}$$

Also $t_0 = \Delta\tau_E/8$. Für die Rakete gilt für $0 \le t \le t_0$:

$$\begin{aligned} x_R(t) &= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right) \\ v_{\max} &= v(t_0) = \frac{at_0}{\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}} \\ x_{\max} &= 2x_R(t_0) + v(t_0)(2t_0) = \frac{2c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}-1\right) + \frac{2at_0^2}{\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

mit $t_0 = \Delta\tau_E/8$. Die Eigenzeit der Rakete berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \Delta\tau_R &= 4\times\frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_0}{c} + 2\times(2t_0)\times\sqrt{1-\frac{v^2(t_0)}{c^2}} \\ &= 4\times\frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_0}{c} + \frac{4t_0}{\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

b) 1 Jahr = 1 a = $3,15\times10^7$ s. 1 Lichtjahr = 1 Lj = $9,45\times10^{15}$ m Eingesetzt ergibt das

$\Delta\tau_E$	$\Delta\tau_R$	$\Delta\tau_E - \Delta\tau_R$	$x_{\max}$	$v_{\max}$
1 a	0.995 a	0.005 a=2 d	$4,5\times10^{14}$ m $= 0,05$ Lj	0.13 c
10 a	7,2 a	2,8 a	3×10^{16} m $= 3,2$ Lj	0.79 c
20 a	10,1 a	9,9 a	$7,6\times10^{16}$ m $= 8,1$ Lj	0.93 c

c) Allgemein gilt für $\Delta\tau_E = 4t_A + 4t_B$

$$\begin{aligned} \Delta\tau_R &= 4\times\frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_A}{c} + 2\times(2t_B)\times\sqrt{1-\frac{v^2(t_A)}{c^2}} \\ &= 4\times\frac{c}{a}\mathrm{Arsinh}\frac{at_A}{c} + \frac{2\times(2t_B)}{\gamma(v_{\max})} \\ &\approx \frac{4t_B}{\gamma(v_{\max})} = \frac{\Delta\tau_E}{\gamma(v_{\max})} \end{aligned}$$

wobei $v(t_A) = v_{\max}$ und $\gamma(v) = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c$ verwendet wurde. In der letzten Zeile wurde $t_B \gg t_A$ verwendet.

3.2 Relativistische Raketen

a) Zeitpunkt des Treffens: $x_A(t) = x_B(t)$. $\rightarrow v_\infty T\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{T^2}}-1\right) = v_B t \rightarrow \sqrt{1+\frac{t^2}{T^2}} = \frac{v_B t}{v_\infty T}+1$

$\rightarrow 1+\frac{t^2}{T^2} = \left(\frac{v_B t}{v_\infty T}\right)^2 + 2\frac{v_B t}{v_\infty T}+1 \rightarrow t = T\frac{2}{\frac{v_\infty}{v_B}-\frac{v_B}{v_\infty}}$.

$t>0$ für $v_\infty > v_B$.

Minkowski-Diagramm: zum selber Zeichnen.

b) Eigenzeit $\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{\gamma(v(t))} = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}dt.$

$v_A(t) = \dot{x}_A(t) = v_\infty T\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{t^2}{T^2}}}\frac{2t}{T^2} = c\frac{t}{T}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{T^2}}}$.

$\tau_A = \int_0^t\sqrt{1-\frac{v_A^2(t)}{c^2}}dt = \int_0^t\sqrt{1-\frac{t^2}{T^2}\frac{1}{1+\frac{t^2}{T^2}}}dt = \int_0^t\sqrt{\frac{1}{1+\frac{t^2}{T^2}}}dt = \int_0^{t/T}\sqrt{\frac{1}{1+z^2}}T dz = T\,\mathrm{Arsinh}\frac{t}{T} = T\,\mathrm{Arsinh}\frac{2T}{\frac{c}{v_B}-\frac{v_B}{c}}.$

(mit $z = t/T$; $dz = dt/T$.)

$v_B(t) = \dot{x}_B(t) = v_B$.

$\tau_B = \int_0^t\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}dt = t\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}} = T\frac{2}{\frac{c}{v_B}-\frac{v_B}{c}}\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}.$

c) Vierervektor $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x}\end{pmatrix}$.

Vierergeschwindigkeit: $u^\mu = \frac{d}{d\tau}x^\mu = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x}\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}\end{pmatrix}$.

Viererbeschleunigung $a^\mu = \frac{d}{d\tau}u^\mu = \gamma\frac{d}{dt}u^\mu = \gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right) = \gamma\left(\frac{d}{dt}\gamma\right)\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}\end{pmatrix} + \gamma^2\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}\end{pmatrix}$.

$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{-2\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c^2} = \frac{\gamma^3\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c^2}$.

$\rightarrow a^\mu = \gamma^4\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v}\end{pmatrix} + \gamma^2\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}\end{pmatrix}$.

Für $\mathbf{v}\parallel\mathbf{a}$ ist $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{v} = v^2\mathbf{a}$, also $a^\mu = \gamma^4\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c} \\ \frac{v^2}{c^2}\mathbf{a}\end{pmatrix} + \gamma^2\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}\end{pmatrix} = \gamma^4\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c} \\ \frac{v^2}{c^2}\mathbf{a} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{a}\end{pmatrix} = \gamma^4\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c} \\ \mathbf{a}\end{pmatrix}$.

Rücktransformation ins Ruhesystem der Rakete:

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\gamma^4\begin{pmatrix} \beta a \\ a \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \gamma^4\begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\beta^2+1\right)\gamma a \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \gamma^3\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}.$$

mit $a = \frac{d}{dt}v_A = v_\infty\left(\frac{1}{T}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{T^2}}} - \frac{1}{2}\frac{t}{T}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{T^2}\right)^{3/2}}\frac{2t}{T^2}\right) = \frac{v_\infty}{T}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{T^2}}}\left(1-\frac{t^2}{T^2}\frac{1}{1+\frac{t^2}{T^2}}\right) = \frac{v_\infty}{T}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{T^2}}}\frac{1}{1+\frac{t^2}{T^2}} = \frac{v_\infty}{T}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{T^2}\right)^{3/2}}$

und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_\infty^2}{c^2}\frac{t^2}{T^2}\frac{1}{1+\frac{t^2}{T^2}}}} = \sqrt{\frac{1+\frac{t^2}{T^2}}{1+\frac{t^2}{T^2}-\frac{v_\infty^2}{c^2}\frac{t^2}{T^2}}}$.

$$a'^\mu = \left(\frac{1+\frac{t^2}{T^2}}{1+\frac{t^2}{T^2}-\frac{v_\infty^2}{c^2}\frac{t^2}{T^2}}\right)^3\frac{v_\infty}{T}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{T^2}\right)^{3/2}} = \frac{v_\infty}{T}\frac{1}{\left[1+\frac{t^2}{T^2}\left(1-\frac{v_\infty^2}{c^2}\right)\right]^3}.$$

3.3 Sternenhimmel

a) Da der Beobachter nach Annahme die gleiche Anzahl Sterne sehen soll, gilt

$$P'(\theta',\varphi')d\Omega' = P(\theta,\varphi)d\Omega\ , \qquad \text{also} \qquad P'(\theta',\varphi') = \frac{d\Omega}{d\Omega'}P(\theta,\varphi) = \frac{d\cos\theta}{d\cos\theta'}P(\theta,\varphi)\ ,$$

da $d\varphi = d\varphi'$. Das ruhende Koordinatensystem zeige nun mit seiner $z-$Achse in Flugrichtung. Die Viererimpulse der Sternenphotonen $p^\mu = (p, \vec{p})$ (wobei $p = \hbar k = h\nu/c$) haben deshalb die z-Komponente $p_z = p\cos\theta$. Im bewegten Koordinatensystem des Raumschiffs gilt somit

$$\begin{aligned} p'\cos\theta' &= \gamma p\,(\cos\theta - \beta)\ , \\ p' &= \gamma p\,(1 - \beta\cos\theta)\ . \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}\ .$$

Damit gilt

$$\frac{d\cos\theta}{d\cos\theta'} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta\cos\theta')^2}$$

und somit

$$P'(\theta', \varphi') = \frac{N}{4\pi}\frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta\cos\theta')^2}\ .$$

b) Das Licht von Sternen in Fahrtrichtung propagiert in $-z-$Richtung auf den Beobachter zu. Dann ist $\theta' = \pi$ und

$$P'(\theta', \varphi') = \frac{N}{4\pi}\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \to \infty \quad \text{für} \quad \beta \to 1\ .$$

Für das Licht von Sternen von hinten gilt $\theta' = 0$, also

$$P'(\theta', \varphi') = \frac{N}{4\pi}\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \to 0 \quad \text{für} \quad \beta \to 1\ .$$

Bei wachsender Geschwindigkeit erscheinen die Sterne in Fahrtrichtung immer stärker konzentriert, während die Sterne entgegen der Fahrrichtung nach vorne zu wandern scheinen. Im Grenzfall $\beta \to 1$ sieht der Beobachter hinter sich gar keine Sterne mehr sondern nur noch direkt vor sich.