4. Tutorium - Lösungen **28.03.2014**

4.1 Viererkraft

a) Die Vierergeschwindigkeit $u^\mu = (\gamma(v)c, \gamma(v)\vec{v})^T$ transformiert wie folgt:

$$\begin{pmatrix} u^{0'} \\ u^{1'} \\ u^{2'} \\ u^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v')c \\ \gamma(v')v'_x \\ \gamma(v')v'_y \\ \gamma(v')v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(V) & -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & \gamma(V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(v)c \\ \gamma(v)v_x \\ \gamma(v)v_y \\ \gamma(v)v_z \end{pmatrix}$$

Die relevante Information steckt in der Zeitkomonente:

$$\begin{aligned} u^{0'} &= \gamma(V)(u^0 - \frac{V}{c}u^1) \\ \gamma(v')c &= \gamma(V)(\gamma(v)c - \frac{V}{c}\gamma(v)v_x) \end{aligned}$$

Dividieren durch c ergibt das Resultat:

$$\gamma(v') = \gamma(V)\gamma(v)(1 - \frac{v_x V}{c^2})$$

b) Die Viererkraft is $K^\mu = \left(\frac{\gamma(v)}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}, \gamma(v)\vec{F}\right)^T$, wobei $\vec{F}$ die Dreierkraft ist. Unter Verwendung der Lorentztransformation wie in Aufgabe (a) erhält man für die Komponenten von $K^{\mu'}$:

$$\begin{aligned} K^{0'} &= \frac{\gamma(v')}{c}\vec{F}'\cdot\vec{v}' = \gamma(V)\left(K^0 - \frac{V}{c}K^1\right) \\ &= \gamma(V)\left(\frac{\gamma(v)}{c}\vec{F}\vec{v} - \frac{V}{c}\gamma(v)K_x\right) \\ K^{1'} &= \gamma(v')F'_x = \gamma(V)\left(K^1 - \frac{V}{c}K^0\right) \\ &= \gamma(V)\left(\gamma(v)F_x - \frac{V}{c}\frac{\gamma(v)}{c}\vec{F}\vec{v}\right) \\ &= \gamma(V)\gamma(v)\left(F_x - \frac{V}{c^2}\vec{F}\vec{v}\right) \\ K^{2'} &= \gamma(v')F'_y = K^2 = \gamma(v)F_y \\ K^{3'} &= \gamma(v')F'_z = K^3 = \gamma(v)F_z \end{aligned}$$

Auflösen nach (F_x, F_y, F_z) ergibt:

$$\begin{aligned} F'_x &= \frac{\gamma(V)\gamma(v)}{\gamma(v')}\left(F_x - \frac{V(\vec{F}\vec{v})}{c^2}\right) \overset{(a)}{=} \frac{1}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}\left(F_x - \frac{V(\vec{F}\vec{v})}{c^2}\right) \\ F'_y &= \frac{\gamma(v)}{\gamma(v')}F_y \overset{(a)}{=} \frac{1}{\gamma(V)\left(1-\frac{v_xV}{c^2}\right)}F_y \\ F'_z &= \frac{\gamma(v)}{\gamma(v')}F_z \overset{(a)}{=} \frac{1}{\gamma(V)\left(1-\frac{v_xV}{c^2}\right)}F_z \end{aligned}$$

4.2 Zerfalls- und Streuprozesse

Der Viererimpuls ist gegeben durch

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 c + \frac{T}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

und es gilt $p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$, wobei m_0 die Ruhemasse ist. Weiters ist T die kinetische Energie.
a) Im Ruhesystem von Teilchen 1 sind die Viererimpulse

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} m_1 c \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_2^\mu = \begin{pmatrix} m_2 c + \frac{T_2}{c} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} \quad p_3^\mu = \begin{pmatrix} m_3 c + \frac{T_3}{c} \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix},$$

wobei T_2, T_3 die kinetischen Energien der Zerfallsprodukte 2 und 3 sind. Es gilt $p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu$. Die 0-Komponente kodiert die Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} m_1 c &= (m_2 + m_3)c + \frac{T_2 + T_3}{c} \\ m_1 &= m_2 + m_3 + \underbrace{\frac{T_2 + T_3}{c^2}}_{\geq 0} \geq m_2 + m_3 \end{aligned}$$

b) Im Ruhesystem von Teilchen 1 schreiben wir die Impulserhaltungsgleichung als $p_3^\mu = p_1^\mu - p_2^\mu$. Mit $p \cdot p = p^\mu p_\mu$ ergibt quadrieren:

$$\begin{aligned} p_3^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 \cdot p_2 \\ m_3^2 c^2 &= m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 - (2 m_1 m_2 c^2 + 2 m T_2) \\ &= (m_1 - m_2)^2 c^2 - 2 m_1 T_2 \end{aligned}$$

Daher:

$$T_2 = \frac{[(m_1 - m_2)^2 - m_3^2] c^2}{2 m_1}$$

Eine analoge Rechnung mit $p_2^\mu = p_1^\mu - p_3^\mu$ ergibt:

$$T_3 = \frac{[(m_1 - m_3)^2 - m_2^2] c^2}{2 m_1}$$

Die gesamte kinetische Energie ist:

$$T_2 + T_3 = [m_1 - (m_2 + m_3)] c^2$$

Daraus ist auch wieder die in Aufgabe (a) abgeleitete Bedingung abzulesen.
c) Einsetzen der Zahlen ergibt:

$$T_{\pi^+} \approx 108.5 \text{MeV} \qquad T_{\pi^0} \approx 110.6 \text{MeV}$$

d) Positron und Elektron haben Ruhemasse m_e und es gilt $p_{e^+}^\mu + p_{e^-}^\mu = p_\gamma^\mu$. Da das Photon einen lichtartigen Viererimpuls hat gilt:

$$\underbrace{p_{e^+}^2}_{m_e^2 c^2} = (p_\gamma - p_{e^-}^\mu)^2 = \underbrace{p_\gamma^2}_{0} + \underbrace{p_{e^-}^2}_{m_e^2 c^2} - 2 p_\gamma \cdot p_{e^-}$$

Daraus folgt $p_\gamma \cdot p_{e^-} = 0$. Dies ist jedoch nicht erfüllbar. Das sieht man zum Beispiel im Ruhesystem von e^- wo

$$p_{e^-}^\mu = \begin{pmatrix} m_2 c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_\gamma^\mu = \hbar k^\mu = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Daher:

$$p_\gamma \cdot p_{e^-} = \hbar\omega m_e$$

Das ist ein Widerspruch. Daher ist dieser Prozess nicht möglich.

Bemerkungen:

- Bei solchen Prozessen müssen noch weitere Erhaltungssätze wie Drehimpulserhaltung (insbesondere Spin), Ladungserhaltung, etc. erfüllt sein.
- Obwohl der Paarvernichtungsprozess für e^+, e^- in ein Photon nicht erlaubt ist, sind Zerfälle unter Aussendung mehrerer Photonen möglich.

4.3 Relativistischer Ruck

Vierervektor: $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$.

Vierergeschwindigkeit: $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\begin{pmatrix} \frac{d(ct)}{dt} \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix}$.

(wobei $d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \frac{dx^\mu dx_\mu}{c^2} = \frac{1}{c^2}\left(c^2dt^2 - d\vec{x}^2\right) = dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right) = dt^2\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) = dt^2\left(1-\beta^2\right)$. $\rightarrow$ $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$.)

Viererbeschleunigung: $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{du^\mu}{dt} = \gamma\frac{d}{dt}\left[\gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}\right] = \gamma\left[\left(\frac{d}{dt}\gamma\right)\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} \frac{dc}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix}\right]$

$= \gamma\left[\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c} \\ \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a} \end{pmatrix}$.

(wobei $\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{2\vec{v}}{c^2}\right)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$.)

Viererruck: $j^\mu = \frac{da^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{da^\mu}{dt} = \gamma\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c} \\ \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a} \end{pmatrix}$

$= \gamma\begin{pmatrix} \left(4\gamma^6\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c} + \gamma^4\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{c}\right) \\ \left(4\gamma^6\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^4\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{c^2}\vec{v} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{a}\right) + \left(2\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)\vec{a} + \gamma^2\left(\vec{j}\right) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4\gamma^7\frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})^2}{c^3} + \gamma^5\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} + \gamma^5\frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{c} \\ 4\gamma^7\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)^2\vec{v} + \gamma^5\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^5\frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{c^2}\vec{v} + \gamma^5\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{a} + 2\gamma^5\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{a} + \gamma^3\vec{j} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4\gamma^7\frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})^2}{c^3} + \gamma^5\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} + \gamma^5\frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{c} \\ 4\gamma^7\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)^2\vec{v} + \gamma^5\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^5\frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{c^2}\vec{v} + 3\gamma^5\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{a} + \gamma^3\vec{j} \end{pmatrix}$

(wobei $\frac{d}{dt}\gamma^n = n\gamma^{n-1}\frac{d}{dt}\gamma = n\gamma^{n-1}\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} = n\gamma^{n+2}\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$.)

b) Für $\vec{v} = 0$ (und damit $\gamma = 1$) gilt: $j^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$. Je nach Größe von $\vec{a}$ oder $\vec{j}$ kann das entweder raum-, zeit-, oder lichtartig sein.

c) $u^\mu u_\mu = \gamma^2c^2 - \gamma^2\vec{v}^2 = \gamma^2c^2\left(1-\beta^2\right) = \frac{1}{1-\beta^2}c^2\left(1-\beta^2\right) = c^2$.

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^\mu u_\mu\right) = \frac{d}{d\tau}\left(c^2\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{d}{d\tau}u^\mu\right)u_\mu + \underbrace{u^\mu\left(\frac{d}{d\tau}u_\mu\right)}_{=g_{\nu\mu}u^\mu\left(\frac{d}{d\tau}u^\nu\right)=u_\nu\left(\frac{d}{d\tau}u^\nu\right)=\left(\frac{d}{d\tau}u^\nu\right)u_\nu} = 0$$

$\rightarrow \quad 2\left(\frac{d}{d\tau}u^\mu\right)u_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad 2a^\mu u_\mu = 0.$

Nochmaliges Ableiten: $\frac{d}{d\tau}\left(a^\mu u_\mu\right) = j^\mu u_\mu + a^\mu a_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad j^\mu u_\mu = -a^\mu a_\mu \neq 0.$

Neuer Ansatz: $J^\mu u_\mu = \left(j^\mu + \alpha a^\nu a_\nu u^\mu\right)u_\mu = \underbrace{j^\mu u_\mu}_{-a^\mu a_\mu} + \alpha a^\nu a_\nu\underbrace{u^\mu u_\mu}_{c^2} = \underbrace{\left(-1+\alpha c^2\right)}_{\stackrel{!}{=}0}a^\mu a_\mu \stackrel{!}{=} 0.$

$\rightarrow \alpha = \frac{1}{c^2}$.

Alternative Rechnung in Dreierkomponenten (hier nur für $\vec{v}=0$ gezeigt):

$$J^\mu u_\mu = (j^\mu + \alpha a^\nu a_\nu u^\mu)\, u_\mu = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma^5 \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} \\ \gamma^3 \vec{j} \end{pmatrix} + \alpha \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma^2 \vec{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma^2 \vec{a} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \gamma c \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \gamma c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \gamma^5 \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} \\ \gamma^3 \vec{j} \end{pmatrix} + \alpha\gamma^4 \vec{a}^2 \begin{pmatrix} \gamma c \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \gamma c \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\gamma^5 \tfrac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{c} + \alpha\gamma^4 \vec{a}^2 \gamma c\right] \gamma c - \left[\gamma^3 \vec{j}\right] 0 = (1-\alpha c^2)\gamma^6 \vec{a}^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

$\rightarrow \alpha = \frac{1}{c^2}$.

Um zu zeigen, dass das auch für $\vec{v} \neq 0$ gilt, ist mit Dreiervektoren allerdings eine längere Rechnung.