5. Tutorium - Lösungen **04.04.2014**

5.1 Feld eines plötzlich gestoppten geladenen Teilchens

a) Siehe Herleitung in Kapitel 18.3 in Prof. Rebhan's Buch.

b) Der Pfad $ABCD$ verläuft entlang der Feldlinien, also ist dort überall $\mathrm{d}^2\vec{f}\vec{E} = 0$. Im Volumen selber gibt es keine Ladungen. Also ist der Fluss durch die Rotationsfläche von FA gleich dem (negativen) Fluss durch die Rotationsfläche von ED - bzw. positiven Fluss, wenn man den Oberflächenvektor in beiden Fällen radial nach außen zeigen lässt. Fluss durch innere „Kappe“ FA:

$$\Phi_{FA} = 2\pi \int_0^\theta \frac{q}{r^2} r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta = 2\pi q \int_0^\theta \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta = 2\pi q \left(1 - \cos\theta\right).$$

Für die äußere Kappe ED erhält man

$$\begin{aligned}\Phi_{ED} &= 2\pi \int_0^{\theta'} \frac{q}{r^2} \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\vartheta\right)^{3/2}} r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta = 2\pi q \int_0^{\theta'} \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\vartheta\right)^{3/2}} \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi q \left(\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\vartheta}} \Bigg|_{\cos\vartheta = \cos\theta'}^{\cos 0} \right) = 2\pi q \left(1 - \frac{\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta'}}\right).\end{aligned}$$

Gleichsetzen $\Phi_{FA} = \Phi_{ED}$ liefert

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta'}}.$$

Mit Hilfe von $\cos\theta = 1/\sqrt{1+\tan^2\theta}$ lässt sich das Ergebnis umschreiben in

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta'}{\cos^2\theta'} = 1 + \frac{\sin^2\theta' - \beta^2\sin^2\theta'}{\cos^2\theta'} = 1 + \left(1-\beta^2\right)\tan^2\theta'$$

bzw. $\tan\theta' = \tan\theta/\sqrt{1-\beta^2} = \gamma\tan\theta$.

5.2 Lorentz-Transformationen von elektrischen und magnetischen Feldern

a) Mit $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$, $F^{i0} = E_i$, $F^{ij} = -\epsilon_{ijk}B_k$, erhält man bei einer Transformation entlang der y-Achse (d.h. die nicht-verschwindenden Einträge von $\Lambda^\mu{}_\nu$ sind $\Lambda^0{}_0 = \Lambda^y{}_y = \gamma$, $\Lambda^0{}_y = \Lambda^y{}_0 = -\beta\gamma$, $\Lambda^x{}_x = \Lambda^z{}_z = 1$),

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} \gamma\left(E_x + \beta B_z\right) \\ E_y \\ \gamma\left(E_z - \beta B_x\right) \end{pmatrix}, \qquad \vec{B}' = \begin{pmatrix} \gamma\left(B_x - \beta E_z\right) \\ B_y \\ \gamma\left(B_z + \beta E_x\right) \end{pmatrix}.$$

Mit diesem Ergebnis berechnet man leicht $\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \vec{E}\cdot\vec{B}$ und $E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2$.

b) Mit dem angegebenen elektromagnetischen Feld bekommt man

$$\vec{E}' = \gamma E_0 \begin{pmatrix} \sin\theta + 2\beta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \vec{B}' = \gamma E_0 \begin{pmatrix} -\beta\cos\theta \\ 0 \\ 2 + \beta\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ sind genau dann parallel wenn man schreiben kann $\vec{E}' = \alpha\vec{B}'$. Das liefert die Bedingungen

$$\sin\theta + 2\beta = -\alpha\beta\cos\theta, \qquad \cos\theta = \alpha\left(2 + \beta\sin\theta\right).$$

Teilen der ersten durch die zweite Gleichung eliminiert α und liefert eine quadratische Gleichung für β,

$$\beta^2 + \frac{5\beta}{2\sin\theta} + 1 = 0,$$

mit der Lösung

$$\beta = \frac{-5 + \sqrt{25 - 16\sin^2\theta}}{4\sin\theta}.$$

(Die andere Lösung der quadratischen Gleichung liefert $|\beta| > 1$ und ist somit unphysikalisch.)
Im Grenzfall $\theta \to \frac{\pi}{2}$ folgt $\beta = -\frac{1}{2}$ und damit $\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Die Felder werden $\vec{E}' = (0,0,0)$, $\vec{B}' = (0,0,\sqrt{3}\,E_0)$, d.h. die Bedingung der Parallelität wird nur durch $\vec{E}' \to 0$ und damit $\alpha \to \infty$ erfüllt. Mit anderen Worten, ein $\vec{E}$-Feld und ein $\vec{B}$-Feld, die aufeinander senkrecht stehen, können in keinem Bezugsystem zueinander parallel sein. Das ist klar wegen der Invarianz von $\vec{E}\cdot\vec{B}$, hier $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$. (Man mache sich für den Fall $\theta < \frac{\pi}{2}$ geometrisch klar, dass $\vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0$ tatsächlich erhalten bleibt, auch für $\vec{E}||\vec{B}$.)

5.3 Lorentzkraft

a)

$$\vec{F} = q\left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) = \frac{qBv}{\sqrt{3}c}\,(1,-1,0)$$

b) Die Lorentzkraft in S' ist

$$\vec{F}' = q\left(\vec{E}' + \frac{\vec{v}'}{c} \times \vec{B}'\right).$$

Wir berechnen zunächst elektrisches und magnetisches Feld in S',

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} E_x \\ \gamma_V\left(E_y - \beta_V B_z\right) \\ \gamma_V\left(E_z + \beta_V B_y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta_V\gamma_V B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}' = \begin{pmatrix} B_x \\ \gamma_V\left(B_y + \beta_V E_z\right) \\ \gamma_V\left(B_z - \beta_V E_y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_V \end{pmatrix},$$

wobei $\beta_V = V/c$, $\gamma_V = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Die Geschwindigkeit $\vec{v}'$ ist nach dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$\vec{v}' = \frac{1}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \begin{pmatrix} v_x - V \\ \frac{v_y}{\gamma_V} \\ \frac{v_z}{\gamma_V} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{Vv}{\sqrt{3}c^2}} \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{3}} - V \\ \frac{v}{\gamma_V\sqrt{3}} \\ \frac{v}{\gamma_V\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in obige Gleichung liefert somit

$$\vec{F}' = \left(\frac{q}{c}\frac{Bv}{\sqrt{3}\left(1 - \frac{Vv}{\sqrt{3}c^2}\right)}, -q\beta_V\gamma_V B - \frac{q}{c}\frac{\gamma_V B\left(\frac{v}{\sqrt{3}} - V\right)}{1 - \frac{Vv}{\sqrt{3}c^2}}, 0\right) = \frac{qBv}{\sqrt{3}c}\frac{1}{1 - \frac{Vv}{\sqrt{3}c^2}}\left(1, -\frac{1}{\gamma_V}, 0\right).$$