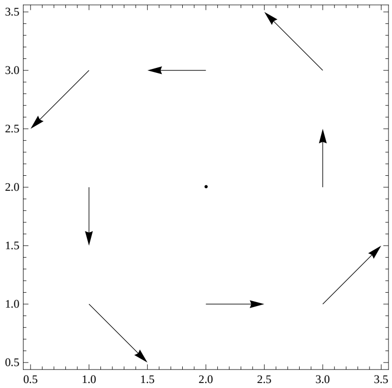
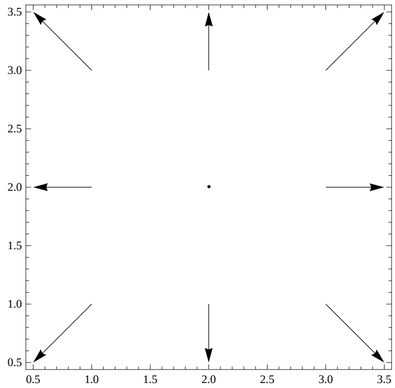
6. Tutorium - Lösungen **11.04.2014**

6.1 Vektorfelder

a)





$$\mathrm{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 1.$$

b)

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{y}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-)\mathrm{grad}\,\phi = (-) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\phi \\ \frac{\partial}{\partial y}\phi \\ \frac{\partial}{\partial z}\phi \end{pmatrix}$$

ϕ ist nicht eindeutig gegeben.
Allgemein: $\vec{E} = (-)\mathrm{grad}\phi$ mit $(-)\phi = \frac{x^2}{4} - x + \frac{y^2}{4} - y + c$ mit beliebiger (Integrations-)Konstante c.
c)

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y \\ \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z \\ \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \end{pmatrix}$$

Lösung $\vec{A}_1 = (0, 0, ?)$ bei der die x- und y-Komponenten verschwinden:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} + x \end{pmatrix}$$

Lösung $\vec{A}_2 = (?, ?, 0)$ bei der die z-Komponente verschwindet:

$$\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} z\left(\frac{x}{2} - 1\right) \\ -z\left(1 - \frac{y}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Differenz der beiden Lösungen: $\mathrm{rot}(\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = \mathrm{rot}\vec{A}_1 - \mathrm{rot}\vec{A}_2 = \vec{B} - \vec{B} = 0$.
Alle Lösungen unterscheiden sich durch ein wirbelfreies Feld voneinander. Das wirbelfreie Feld kann man als Gradient eines Skalarfeldes schreiben. Daher kann man die allgemeine Lösung angeben als $\vec{A} = \vec{A}_1 + \mathrm{grad}\phi_1$ oder $\vec{A} = \vec{A}_2 + \mathrm{grad}\phi_2$ für allgemeine Funktionen $\phi_{1,2} = \phi_{1,2}(x, y, z)$.

6.2 Zylinder mit exzentrischer Längsbohrung

a) Laplace Operator und Gradient in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \qquad \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z,$$

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R_0 \\ 0 & r > R_0. \end{cases}$$

Durchführung der ersten Integration von $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -4\pi\rho(\vec{r})$:

$$r\frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases} -2\pi\rho_0 r^2 + C_1 & r \leq R_0 \\ C_2 & r > R_0 \end{cases}$$

mit $-2\pi\rho_0 R_0^2 + C_1 = C_2$ (Stetigkeitsbedingung bei $r = R_0$). Die zweite Integration ergibt

$$\phi = \begin{cases} -\pi\rho_0 r^2 + C_1 \ln r + C_3 & r \leq R_0 \\ C_2 \ln r + C_4 & r > R_0 \end{cases}$$

mit $-\pi\rho_0 R_0^2 + C_1 \ln R_0 + C_3 = C_2 \ln R_0 + C_4$. Davon abgeleitet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -\vec{e}_r\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial r} = \vec{e}_r \begin{cases} +2\pi\rho_0 r - \frac{C_1}{r} & r \leq R_0 \\ -\frac{C_2}{r} & r > R_0. \end{cases}$$

Um $\vec{E}(0,0,z) = 0$ zu erhalten (was aus Symmetriegründen folgt), muss $C_1 = 0$ sein (d.h. $\phi(0,0,z)$ ist endlich entlang der Zylinderachse). Daraus folgt $C_2 = -2\pi\rho_0 R_0^2$. C_3 ist beliebig und C_4 folgt aus der zweiten Stetigkeitsbedingung, also

$$\phi = \begin{cases} -\pi\rho_0 r^2 + C_3 & r \leq R_0 \\ -2\pi\rho_0 R_0^2 \ln\frac{r}{R_0} - \pi\rho_0 R_0^2 + C_3 & r > R_0 \end{cases} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_r \begin{cases} 2\pi\rho_0 r & r \leq R_0 \\ 2\pi\rho_0\frac{R_0^2}{r} & r > R_0. \end{cases}$$

b) Anwendung des Superpositionsprinzips, z.B. Verlegung des Lochs in $\vec{e}_x$-Richtung:

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y,z) &= -\pi\rho_0\left(x^2 + y^2\right), \\ \phi_2(x,y,z) &= +\pi\rho_0\left((x-a)^2 + y^2\right). \end{aligned}$$

Addieren: $\phi(x,y,z) = \phi_1(x,y,z) + \phi_2(x,y,z) = \pi\rho_0\left(a^2 - 2ax\right)$. Berechnung von $\vec{\nabla}$ in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2a\pi\rho_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a\pi\rho_0\vec{e}_x = 2\vec{a}\pi\rho_0.$$

6.3 Leitende Ebene mit kugelförmiger Ausbuchtung

Ansatz: Bildladungen an der Kugel gespiegelt, an der Ebene gespiegelt, und die gespiegelte Bildladung an der anderen Fläche wieder gespiegelt:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{q}{|\vec{r} - b\vec{e}_z|} - \frac{q'}{|\vec{r} - b'\vec{e}_z|} + \frac{q'}{|\vec{r} + b'\vec{e}_z|} - \frac{q}{|\vec{r} + b\vec{e}_z|}, \qquad \text{mit } q' = q\frac{a}{b}, \quad b' = \frac{a^2}{b}. \\ &= \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}} - \frac{qa}{b\sqrt{a^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2r\frac{a^2}{b}\cos\theta}} + \frac{qa}{b\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{b^2} + 2r\frac{a^2}{b}\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 + 2rb\cos\theta}} \end{aligned}$$

Das erfüllt die Randbedingungen auf der Ebene

$$\phi(x,y,0) = \frac{q}{\sqrt{R^2+b^2}} - \frac{q}{\sqrt{R^2+b^2}} - \frac{q'}{\sqrt{R^2+b'^2}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b'^2}} = 0, \qquad \text{mit } R^2 = x^2+y^2,$$

und auf der Halbkugel

$$\phi(r=a) = \frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} - \frac{qa}{b\sqrt{a^2+\frac{a^4}{b^2}-2a\frac{a^2}{b}\cos\theta}} + \frac{qa}{b\sqrt{r^2+\frac{a^4}{b^2}+2a\frac{a^2}{b}\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}} = 0.$$

Berechnung der influenzierten Ladungsdichte über $4\pi\sigma = E_r(r=a)$ und $E_r = -\partial\phi/\partial_r$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \left(-\frac{1}{2}q\right)\frac{2r-2b\cos\theta}{(...)^{3/2}} - \frac{qa}{b}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2r-2\frac{a^2}{b}\cos\theta}{(...)^{3/2}} + (q \leftrightarrow -q \,\text{und}\, \cos\theta \leftrightarrow -\cos\theta)$$

Einsetzen von $r=a$ liefert nach einer längeren, aber nicht komplizierten Rechnung

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}(r=a) = ... = -\frac{q\left(a-\frac{b^2}{a}\right)}{\left(a^2+b^2-2ab\cos\theta\right)^{3/2}} + \frac{q\left(a-\frac{b^2}{a}\right)}{\left(a^2+b^2+2ab\cos\theta\right)^{3/2}}.$$

Daraus folgt mit $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi}{\partial r}(r=a)$:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}qa\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{1}{\left(a^2+b^2-2ab\cos\theta\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(a^2+b^2+2ab\cos\theta\right)^{3/2}}\right).$$

Die Gesamtladung ergibt sich aus Integration über die Halbkugel

$$\begin{aligned}
Q &= \int_F \sigma \mathrm{d}^2 f \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta a^2 \sigma \\
&= a^2 \frac{1}{4\pi} qa\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}u \left(\frac{1}{\left(a^2+b^2-2abu\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(a^2+b^2+2abu\right)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}qa^3\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{a^2+b^2-2abu}}\left(-\frac{1}{2ab}\right) + \frac{1}{ab}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+2abu}}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}qa^3\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b+a} - \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}qa\left(a^2-b^2\right)\frac{1}{ab}\left(\frac{2b}{b^2-a^2} - \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&= -q\left(1-\frac{b^2-a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\right).
\end{aligned}$$